DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Universidad Autónoma de Occidente
Matemáticas Aplicadas (131204)
Ejercicios Asignados

CALIFICACIÓN

12 de mayo de 2019

Instrucciones. *Primero lea cuidadosa y detalladamente el taller, después, responda de manera clara y ordenada. Justifique todas las respuestas.*

1. Análisis de entrada–salida (input–output)

La macroeconomía es una rama de la economía que trata de los aspectos amplios y generales de un sistema económico, por ejemplo, las relaciones entre los ingresos, las inversiones y los gastos de un país en su totalidad. Se han desarrollado muchas técnicas para tratar estos problemas en la macroeconomía. Discutiremos ahora uno de los más importantes.

Para introducir el modelo suponemos que el parlamento de un cierto país de economía muy desarrollada (por ejemplo, los Estados Unidos) ha aprobado una gran disminución en los gastos para construcción de carreteras. Si no se diera además un aumento en otras inversiones, se esperaría una disminución en los ingresos y en el empleo. Por otra parte, supóngase que el gobierno aumentara sus gastos militares en una cantidad equivalente a la disminución en la construcción de carreteras. ¿Cuál sería el cambio (si es que alguno tiene lugar) en los ingresos y el empleo?

La respuesta es compleja por el hecho de que la construcción de carreteras y los proyectos militares usan el dinero de maneras distintas. Por ello, aunque podría darse un aumento en los ingresos y en el nivel de ocupación entre los trabajadores de industrias como las fabricantes de aviones y barcos, eso podría no compensar las pérdidas y el desempleo en el sector de las obras públicas y la construcción (al menos a corto plazo). El problema radica en que en la economía de un país como Estados Unidos se producen muchos bienes y servicios altamente relacionados entre sí. Los aumentos o recortes en una industria se manifiestan frecuentemente también en otras industrias.

Un modelo para analizar estos efectos fue desarrollado por el economista Wassily W. Leontief en 1936. Tal modelo se llama *análisis de entradas y salidas* o *input– output*. Antes de describir en detalle este modelo presentamos un ejemplo sencillo

Ejemplo 1. Considérese un modelo muy simplificado de una economía en la que se producen dos artículos: automóviles (incluyendo camiones) y acero. Cada año se da una *demanda externa* de 360000 toneladas de acero y de 110000 automóviles. Aquí la palabra *externa* significa que la demanda proviene de fuera de la economía.

Nombre del estudiante:

Por ejemplo, si fuera un modelo de una porción de la economía de España, la demanda podría venir de otros países (de tal manera que el acero y los automóviles se exportarían), de otras industrias en España y de empresas privadas.

Pero la demanda externa no es la única que se da en las dos industrias consideradas. Se requiere acero para producir automóviles. También se requieren automóviles para producir automóviles, porque las plantas manufactureras de esos vehículos requieren coches y camiones para transportar los materiales y los empleados. De igual manera, la industria del acero requiere acero (para su maquinaria) y automóviles (para el transporte del producto y de los trabajadores) en su operación. Así que cada una de las dos industrias en el sistema impone demandas a sí misma y a la otra industria. Estas acciones se llaman *demandas internas*.

En nuestro modelo simplificado, se puede suponer que la industria del acero requiere $\frac{1}{4}$ de tonelada de acero y $\frac{1}{12}$ de automóvil (o camión) para producir 1 tonelada de acero (es decir, se usa un automóvil o camión en la producción de 12 toneladas de acero). También la industria automotriz requiere de $\frac{1}{2}$ tonelada de acero y $\frac{1}{9}$ de vehículo para producir un automóvil. La pregunta planteada por el modelo de Leontief de entradas y salidas es entonces la siguiente: ¿cuántas toneladas de acero y cuántos automóviles se deben producir cada año para que la disponibilidad de cada uno sea igual a la demanda total?

Solución. Sean x e y el número total de toneladas de acero y el número de automóviles, respectivamente, en cierto año. Esto constituye la oferta (o lo disponible). Si, por ejemplo, se requiere $\frac{1}{4}$ de tonelada de acero para producir una tonelada de este metal, se necesita entonces $\frac{1}{4}x$ toneladas de acero para producir x toneladas de acero. Similarmente, se requiere $\frac{1}{2}y$ toneladas de acero para producir y automóviles. Por consiguiente, el total de la demanda interna en la industria productora de acero es $\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y$, y la demanda total (sumando la demanda externa) es $\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y + 360000$. De manera análoga, la demanda total en la industria automotriz es $\frac{1}{12}x + \frac{1}{9}y + 110000$.

Igualando la oferta con la demanda se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y + 360000 \\ y &= \frac{1}{12}x + \frac{1}{9}y + 110000 \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}y = 360000$$
$$-\frac{1}{12}x + \frac{8}{9}y = 110000$$

Resolviendo dicho sistema, llegamos a que $x = 600000$, $y = 180000$. Esto es, para que la oferta sea exactamente igual a la demanda, se deben producir 600000 toneladas de acero y 180000 automóviles.

Ahora describimos el modelo general de Leontief de entradas y salidas. Supóngase que un sistema económico tiene n industrias. De nuevo, hay dos clases de demandas en cada industria. Primero está la demanda externa de fuera del sistema. Si el sistema en un país, por ejemplo, la demanda externa podría ser de otro país. En segundo lugar está la demanda de una industria sobre otra, dentro del mismo sistema.

Sea e_i la demanda externa sobre la industria i. Sea a_{ij} la demanda interna de la industria j sobre la industria i. De un modo más preciso, a_{ij} representa el número de unidades de producto de la industria i necesarias para producir 1 unidad de producto de la industria j. Sea x_i la producción de la industria i. Ahora suponemos que la producción de cada industria es igual a su demanda (es decir, no hay sobreproducción). La demanda total es igual a la suma de las demandas interna y externa. Para calcular la demanda interna en la industria 2, por ejemplo, notamos que $a_{21}x_1$ es la demanda sobre la industria 2 por parte de la industria 1. Así, el total de la demanda interna sobre la industria 2 es

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n$$

De esta forma llegamos al siguiente sistema de ecuaciones, el cual se obtiene al igualar la demanda total con la producción de cada industria:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + e_1 & = & x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + e_2 & = & x_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + e_n & = & x_n \end{array}$$

o, escribiéndolo de otra manera,

$$\begin{array}{rcl} (1 - a_{11}x_1) + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & e_1 \\ a_{21}x_1 + (1 - a_{22}x_2) + \cdots + a_{2n}x_n & = & e_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (1 - a_{nn}x_n) & = & e_n \end{array}$$

Muchas veces conviene escribir los números a_{ij} en forma de matriz A, llamada *matriz de tecnología* o también *matriz de requerimientos directos*. Se tiene así

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

la cual es una matriz cuadrada. Obsérvese entonces que el sistema de ecuaciones anterior se puede escribir de una manera mucho más simple como

$$(I - A)X = E$$

donde X es la matriz columna de las producciones x_i y E es la matriz columna de las demandas externas x_i. La matriz $I - A$ en este modelo se llama *matriz de Leontief.*

Suponiendo que la matriz de Leontief es invertible, la matriz de producción X puede expresarse como

$$X = (I - A)^{-1}E$$

Esta forma de escribir la matriz de producción tiene algunas ventajas. La matriz de tecnología A es la matriz de las demandas internas, las cuales, en periodos relativamente largos, permanecen fijas. Sin embargo, la matriz E de la demanda externa puede cambiar con cierta frecuencia. Normalmente se requiere mucho cálculo para obtener $(I-A)^{-1}$, pero una vez obtenida esta matriz se puede encontrar la matriz de producción X correspondiente a cualquier matriz E de demanda mediante una simple multiplicación de matrices. Si no se halla $(I - A)^{-1}$, habría que resolver un sistema de ecuaciones para cada matriz E.

Ejemplo 2. Supóngase que en un sistema económico con tres industrias las demandas externas son, respectivamente, de 10, 25 y 20. Considérese que $a_{11} = 0,2$, $a_{12} = 0,5$, $a_{13} = 0,15$, $a_{21} = 0,4$, $a_{22} = 0,1$, $a_{23} = 0,3$, $a_{31} = 0,25$, $a_{32} = 0,5$ y $a_{33} = 0,15$. Encontrar la producción en cada industria para equilibrar con exactitud la oferta con la demanda. Repetir el problema para unas demandas externas de 15, 20, 40.

Solución. En este caso $n = 3$ y la matriz A de tecnología está dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}15 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & 0{,}15 \end{pmatrix}$$

con lo cual la matriz de Leontief es

$$I - A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}5 & -0{,}15 \\ -0{,}4 & 0{,}9 & -0{,}3 \\ -0{,}25 & -0{,}5 & 0{,}85 \end{pmatrix}$$

Calculando su inversa, tenemos

$$(I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 2,78594 & 2,26497 & 1,29103 \\ 1,87992 & 2,91048 & 1,35896 \\ 1,92521 & 2,37818 & 2,35555 \end{pmatrix}$$

y así, tenemos en el primer caso

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,78594 & 2,26497 & 1,29103 \\ 1,87992 & 2,91048 & 1,35896 \\ 1,92521 & 2,37818 & 2,35555 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 25 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 110{,}30 \\ 118{,}74 \\ 125{,}82 \end{bmatrix}$$

mientras que en el segundo caso, $x_1 \approx 139, x_2 \approx 141$ y $x_3 \approx 171$.

Ejercicio 1.1:

Pablo, Jaime y María deciden ayudarse mutuamente para construir casas. Pablo empleará la mitad de su tiempo en su propia casa y una cuarta parte de su tiempo en cada una de las casas de Jaime y María. Jaime empleará un tercio de su tiempo en cada una de las casas en construcción. María empleará un sexto de su tiempo en la casa de Pablo, un tercio en la casa de Jaime y la mitad de su tiempo en su propia casa. Por razones de impuestos, cada uno ha de fijar un precio a su trabajo, pero ellos lo quieren hacer de manera que nadie gane ni pierda dinero. Muestre que el proceso de determinar los salarios de acuerdo con esas premisas es un modelo cerrado de Leontief conteniendo tres ecuaciones homogéneas y encuentre después los salarios de cada persona.

Ejercicio 1.2:

Consideremos cuatro países del Tercer Mundo y supongamos que cada uno de ellos produce un tipo de fruta diferente destinada a exportación, y que cada uno usa el dinero obtenido con la venta para pagar la importación de las frutas de los otros países. El país A exporta el 20% de su fruta al país B, el 30% al país C, el 35% al país D y usa el resto de su fruta para consumo interno. El país B exporta el 10% de su fruta al país A, el 15% al país C, el 35% al país D y retiene el resto para sus propios ciudadanos. El país C no exporta al país A; divide su cosecha por igual entre los países B y D y su propia población. El país D no consume su propia fruta, sino que la exporta toda, con un 15% yendo al país A, un 40% al país B y un 45% al país C. Muestre que el problema de determinar los precios de las cosechas anuales de fruta de modo que cada país no salga beneficiado ni perjudicado es equivalente a resolver cuatro ecuaciones homogéneas con cuatro incógnitas y después determine los precios.