Universidad Autónoma de Occidente

Victor Hugo Gil Avendaño

Cálculo II (CE)

22/02/03

APLICACIONES EN LA ADMINISTRACIÓN Y LA ECONOMÍA

Coeficientes de desigualdad para distribuciones de ingreso

Sea y la proporción del ingreso total de cierta población que se recibe por la proporción x de captadores de ingresos cuyo ingreso es mínimo. Por ejemplo, suponga que cuando $x = \frac{1}{2}$ entonces $y = \frac{1}{4}$. Esto significaría que al 50% de la población que recibe el ingreso más bajo corresponde el 25% del ingreso total. O si $y = 0.7$ cuando $x = 0.9$, entonces el 90% de la población con los ingresos más bajos recibiría el 70% del ingreso total. En general, dado que x y y son fracciones de un todo, están entre 0 y 1 incluso ($0 \leq x \leq 1$ y $0 \leq y \leq 1$) y y es una función de x, esto es, $y = f(x)$.

Supondremos que no hay personas que reciban un ingreso cero, de modo que $f(0) = 0$. Más aún, todo el ingreso es recibido por el 100% de los captadores de ingresos, y así $f(1) = 1$. La gráfica de la función $f(x)$ que describe la distribución de ingreso real se denomina una **curva de Lorentz**.

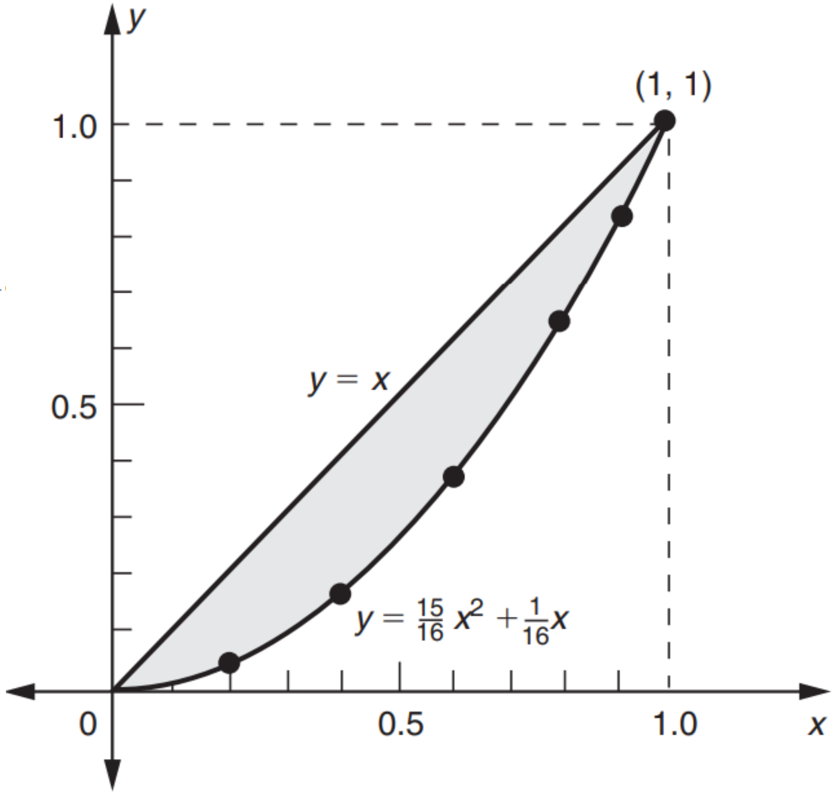
Suponga que una curva de Lorentz está dada por la ecuación $y = \frac{15}{16}x^2 + \frac{1}{16}x$. (Véase la figura 16). Cuando $x = 0.2$, tenemos

$$y = \tfrac{15}{16}(0.2)^2 + \tfrac{1}{16}(0.2) = 0.05$$

Esto significa que el 20% de la gente con los ingresos más bajos sólo recibe el 5% del ingreso total. De manera similar, si $x = 0.5$, tenemos

$$y = \tfrac{15}{16}(0.5)^2 + \tfrac{1}{16}(0.5) = 0.2656$$

esto es, que el 50% de tal gente sólo recibe 26.56% del ingreso total



La equidad perfecta de la distribución del ingreso está representada por la línea $y = x$. Por ejemplo, de acuerdo con esto el 10% de la gente recibe el 10% del ingreso total, 20% de las personas reciben el 20% del ingreso total, etc. La desviación de la distribución de ingreso real de la equidad perfecta se mide por el grado en que la curva de Lorentz real se aparta de la línea recta $y = x$. Si la curva de Lorentz está cerca de la línea recta, el ingreso estará distribuido casi de manera uniforme, mientras que una gran desviación de la línea indica una considerable desigualdad en la distribución. Definimos el **coeficiente de desigualdad** de la curva de Lorentz como

$$L = \frac{\text{Área entre la curva y la línea } y = x}{\text{Área bajo la línea } y = x}$$

Ahora bien, el área bajo la línea $y = x$ es un triángulo rectángulo, de modo que está dada por

$$\tfrac{1}{2}(\text{base}) \times (\text{altura}) = \tfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \tfrac{1}{2}$$

En consecuencia, el coeficiente de desigualdad de una curva de Lorentz está dado por

$$
\begin{aligned}
L &= 2 \cdot \text{Área entre la curva de Lorentz y la línea } y = x \\
&= 2\int_0^1 [x - f(x)]\, dx
\end{aligned}
$$

en donde $y = f(x)$ es la ecuación de la curva de Lorentz.

Por ejemplo, el coeficiente de desigualdad de la curva de Lorentz dada por $y = f(x) = \frac{15}{16}x^2 + \frac{1}{16}x$ es

en donde $y = f(x)$ es la ecuación de la curva de Lorentz.

Por ejemplo, el coeficiente de desigualdad de la curva de Lorentz dada por $y = f(x) = \frac{15}{16}x^2 + \frac{1}{16}x$ es

$$
\begin{aligned}
L &= 2\int_0^1 \left[x - \left(\frac{15}{16}x^2 + \frac{1}{16}x\right)\right] dx \\
&= 2\int_0^1 \left(\frac{15}{16}x - \frac{15}{16}x^2\right) dx \\
&= 2 \cdot \frac{15}{16}\int_0^1 (x - x^2)\, dx = \frac{15}{8}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 \\
&= \frac{15}{8}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - 0 + 0\right) = \frac{15}{8} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{16}
\end{aligned}
$$

El coeficiente de desigualdad siempre está entre 0 y 1, como es evidente por su definición geométrica. Cuando el coeficiente es cero, el ingreso está distribuido de manera uniforme perfecta; cuanto más cerca esté de 1, mayor será la desigualdad en la distribución del ingreso. ☛ **14**

1. *(Curva de Lorentz)* La distribución del ingreso de cierto país está descrita por la curva de Lorentz $y = \frac{19}{20}x^2 + \frac{1}{20}x$, en donde x es la proporción de captadores de ingresos y y es la proporción del ingreso total recibido.

a) ¿Qué proporción recibe el 20% de la gente más pobre?

b) Determine el coeficiente de desigualdad de la curva de Lorentz.

2. *(Curva de Lorentz)* Repita el ejercicio 1 en el caso de la curva de Lorentz $y = 0.94x^2 + 0.06x$.

Curvas de aprendizaje

En producción industrial, la administración a menudo debe estimar de antemano el número total de horas-hombre que requerirá con la finalidad producir un número determinado de unidades de su producto. Por ejemplo, esto se requiere para establecer el precio de venta, la fecha de entrega o la concertación de un contrato. Una herramienta que con frecuencia se utiliza para tal predicción se denomina *curva de aprendizaje.*

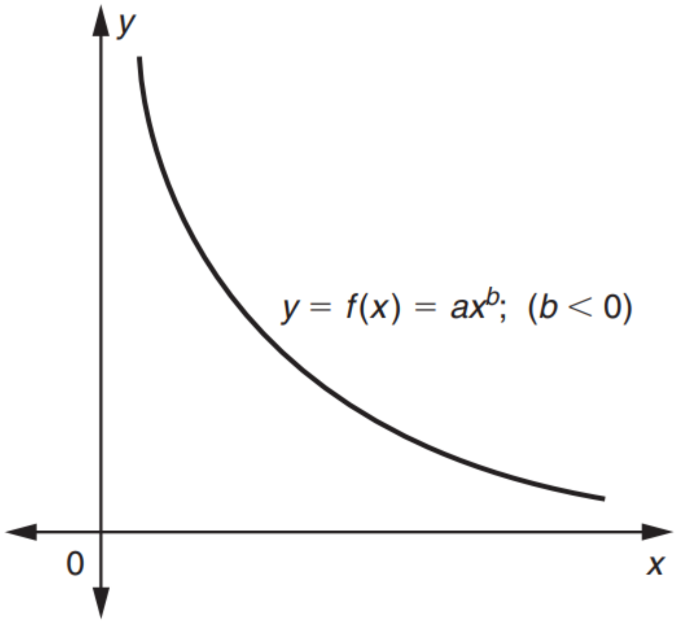
Se sabe que una persona tiende a requerir menos tiempo en la ejecución de una tarea particular si ya la ha realizado antes un número de veces. En otras palabras, cuanto más repita una persona una tarea, será más eficiente y empleará menos tiempo al realizarla de nuevo. Así, entre más unidades se produzcan en una serie de producción, el tiempo necesario para producir cada unidad irá descendiendo.

Sea $T = F(x)$ el tiempo (por ejemplo, en horas-hombre) necesario en la producción de las primeras x unidades. Un incremento Δx en la producción demanda un incremento ΔT en el tiempo, y la razón $\Delta T/\Delta x$ es el tiempo promedio por unidad adicional producida cuando el número de unidades producidas cambia de x a $x + \Delta x$. En el límite cuando $\Delta x \to 0$, esta razón se aproxima a la derivada $dT/dx = F'(x)$, que es el tiempo requerido por unidad adicional cuando ocurre un pequeño incremento en la producción. Al igual que las otras tasas marginales, esta cantidad es casi igual al tiempo requerido en la producción de la siguiente unidad; esto es, la unidad número $(x + 1)$.

Si hacemos $F'(x) = f(x)$, la función que por lo regular se utiliza en tal situación es de la forma

$$f(x) = ax^b$$

en donde a y b son constantes con $a > 0$ y $-1 \leq b < 0$. La elección de ax^b con $-1 \leq b < 0$ asegura que el tiempo requerido por unidad disminuye a medida que se producen más y más unidades. (Véase la figura 17). La gráfica de $f(x)$ se denomina una **curva de aprendizaje**. En la práctica, las constantes a y b se determinarían con base en series de producción preliminar o por experiencias con productos similares.



A condición de que el mejoramiento en la eficiencia o el aprendizaje sea lo bastante regular, la curva de aprendizaje (una vez que se ha establecido) puede utilizarse en la predicción del número total de horas-hombre requeridas en niveles de producción futuros. *El número total de horas-hombre* ΔT *requeridas para producir unidades numeradas* $c + 1$ *hasta* d *está dado por*

$$\begin{aligned}\Delta T &= (\text{horas-trabajo para unidades producidas } d) \\ &\quad -(\text{horas-trabajo para producir las primeras } c \text{ de ellas} \\ &= F(d) - F(c)\end{aligned}$$

Esto es,

$$\boxed{\Delta T = \int_c^d f(x)\, dx = \int_c^d ax^b\, dx}$$

EJEMPLO 1 Después de producir 1000 televisores, una empresa determina que su planta de ensamblado está siguiendo una curva de aprendizaje de la forma

$$f(x) = 20x^{-0.152}$$

en donde $f(x)$ es el número de horas-hombre requeridos con el propósito de ensamblar el televisor número $(x + 1)$. Estime el número total de horas-hombre requeridas en el ensamblado de 4000 televisores adicionales.

Solución El número total de horas-hombre requeridas en el ensamblado de 4000 televisores adicionales después de los primeros 1000 está dado por

$$\Delta T = \int_{1000}^{5000} f(x)\,dx = \int_{1000}^{5000} 20x^{-0.152}\,dx = \left[20 \cdot \frac{x^{-0.152+1}}{-0.152 + 1}\right]_{1000}^{5000}$$

$$= \frac{20}{0.848}[(5000)^{0.848} - (1000)^{0.848}] = 23.59(1370 - 350)$$

$$= 24{,}060$$ ☛ **15**

3. *(Curva de aprendizaje)* Después de pintar los primeros 40 automóviles, un establecimiento de pintado de automóviles estima que la curva de aprendizaje es de la forma $f(x) = 10x^{-0.25}$. Encuentre el número total de horas-hombre que se requerirán para pintar 60 automóviles más.

4. *(Curva de aprendizaje)* Sonido X & Y produce radiorreceptores en su línea de ensamblado. Se sabe que los primeros 100 aparatos (1 unidad) les lleva un total de 150 horas-hombre y por cada unidad adicional de 100 aparatos, se requirió menos tiempo de acuerdo con la curva de aprendizaje $f(x) = 150x^{-0.2}$, en donde $f(x)$ es el número de horas-hombre requeridas para ensamblar la unidad número $(x + 1)$. ¿Cuántas horas-hombre se requerirán con el objetivo de ensamblar 5 unidades (esto es, 500 radiorreceptores) después de que se han ensamblado las primeras 5 unidades?

5. *(Curva de aprendizaje)* Electrónica Morales produce calculadoras electrónicas en su línea de ensamblado. Las primeras 50 calculadoras demandan 70 horas, y por cada unidad adicional de 50 calculadoras, se requiere menos tiempo de acuerdo con la curva de aprendizaje $f(x) = 70x^{-0.32}$. ¿Cuánto tiempo demandará el ensamblado de 500 calculadoras después de que se han ensamblado las primeras 200 calculadoras?

6. *(Curva de aprendizaje)* Suponiendo que existe una mejora del 20% cada vez que la producción se duplica (por ejemplo, la sexta unidad requiere 80% del tiempo consumido por la tercera unidad, la vigésima unidad requiere 80% del tiempo demandado por la décima unidad, etc.) determine el valor de la constante b para la curva de aprendizaje $f(x) = ax^b$.

mero $(x + 1)$. ¿Cuántas horas-hombre se requerirán con el objetivo de ensamblar 5 unidades (esto es, 500 radiorreceptores) después de que se han ensamblado las primeras 5 unidades?

5. *(Curva de aprendizaje)* Electrónica Morales produce calculadoras electrónicas en su línea de ensamblado. Las primeras 50 calculadoras demandan 70 horas, y por cada unidad adicional de 50 calculadoras, se requiere menos tiempo de acuerdo con la curva de aprendizaje $f(x) = 70x^{-0.32}$. ¿Cuánto tiempo demandará el ensamblado de 500 calculadoras después de que se han ensamblado las primeras 200 calculadoras?

6. *(Curva de aprendizaje)* Suponiendo que existe una mejora del 20% cada vez que la producción se duplica (por ejemplo, la sexta unidad requiere 80% del tiempo consumido por la tercera unidad, la vigésima unidad requiere 80% del tiempo demandado por la décima unidad, etc.) determine el valor de la constante b para la curva de aprendizaje $f(x) = ax^b$.