**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS**

**Universidad Autónoma de Occidente**

**CALIFICACIÓN**

19 de mayo de 2019

**Cálculo II (131230 - GR 3 )**

*Recopilación de ejercicios*

**Instrucciones.** *Primero lea cuidadosa y detalladamente el taller, después, responda de manera clara y ordenada. Justifique todas las respuestas.*

# Funciones de Varias Variables

1. *El índice temperatura-humedad $I$ (o humidex, para abreviar) es la temperatura del aire que se percibe cuando la temperatura real es $T$ y la humedad relativa es $h$, de modo que es posible escribir $I = f(T, h)$. La tabla de valores siguiente de $I$ es una parte de una tabla que elaboró la National Oceanic and Atmospheric Administration.*

Humedad relativa (%)

| Temperatura real (°F) | $T$ \ $h$ | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 80 | 77 | 78 | 79 | 81 | 82 | 83 |
| | 85 | 82 | 84 | 86 | 88 | 90 | 93 |
| | 90 | 87 | 90 | 93 | 96 | 100 | 106 |
| | 95 | 93 | 96 | 101 | 107 | 114 | 124 |
| | 100 | 99 | 104 | 110 | 120 | 132 | 144 |

   a) *¿Cuál es el valor de $f(95, 70)$? ¿Qué significa?*

   b) *¿Para qué valor de $h$ es $f(90, h) = 100$?*

   c) *¿Para qué valor de $T$ es $f(T, 50) = 88$?*

   d) *¿Cuál es el significado de las funciones $I = f(80, h)$ e $I = f(100, h)$? Compare el comportamiento de estas dos funciones de $h$.*

2. *Un modelo para el área de la superficie del cuerpo humano está dado por la función*

$$S = f(w, h) = 0{,}1091\, w^{0{,}425}\, h^{0{,}725}$$

*donde $w$ es el peso (en libras), $h$ es la altura (en pulgadas), y $S$ es medida en pies cuadrados.*

Nombre del estudiante:

a) *Encuentre* $f(160, 70)$ *e interprételo.*

b) *¿Cuál es el área de su propio cuerpo?*

3. *Hallar y dibujar los dominios de las siguientes funciones de varias variables*

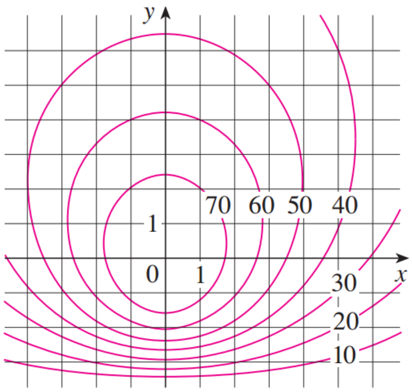
a)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+3xy+2y^2}{x-y} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

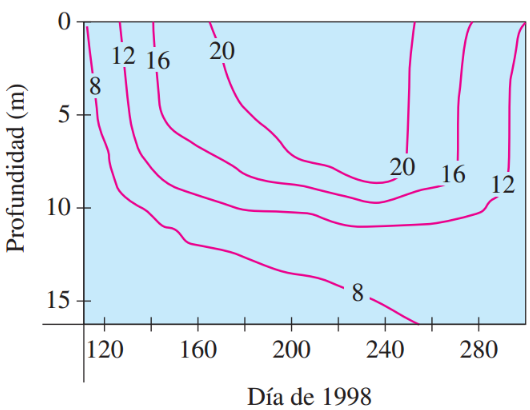
b) $g(x,y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$

c) $h(x,y) = Ln((9 - x^2 - y^2) \cdot (x^2 + y^2 - 1))$

4. *Se proporciona un mapa de contorno para una función* $f$*. Con éste estime los valores de* $f(-3,3)$ *y* $f(3,-2)$*. ¿Qué puede decir respecto a la forma de la gráfica?*




5. *Se muestran las curvas de nivel (isotermas) para la temperatura del agua (en °C) en Long Lake (Minnesota) en 1998 como una función de la profundidad y el tiempo en años. Estime la temperatura en el lago el 9 de junio (día 160) a una profundidad de 10 m y el 29 de junio (día 180) a una profundidad de 5 m*




6. *Si* $V(x,y)$ *es el potencial eléctrico en un punto* $(x,y)$ *del plano* $xy$*, entonces las curvas de nivel de* $V$ *se llaman curvas equipotenciales, porque en todos los puntos*

*de dicha curva el potencial eléctrico es el mismo. Trace algunas curvas equipotenciales si* $V(x,y) = \dfrac{c}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}$*, donde* $c$ *es una constante positiva.*

7. *Determine el límite, si existe, o demuestre que no existe.*

a)
$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} Ln\left(\frac{1+y^2}{x^2+xy}\right)$$

b)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-4y^2}{x^2+2y}$$

c)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^6}$$

d)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2+3xy+4y^2}{3x^2+5y^2}$$

e)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$$

f)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{-x^2-y^2}-1}{x^2+y^2}$$

8. *Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Si es falsa,explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre que es falsa.*

a) Si $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, entonces $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,0) = 0$.

b) Si $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(0,y) = 0$, entonces $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

c) Si $f$ es continua para todo $x$ e $y$ distintos de cero, y $f(0,0) = 0$, entonces $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

# Derivadas Parciales

1. *La altura* $h$ *de una ola en el mar abierto depende de la rapidez* $v$ *del viento y de la cantidad de tiempo* $t$ *que el viento ha estado soplando a esa rapidez. En la tabla siguiente se registran valores de la función* $h = f(v,t)$ *en pies.*

Duración (horas)

| $v$ \ $t$ (Velocidad del viento (nudos)) | 5 | 10 | 15 | 20 | 30 | 40 | 50 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 15 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 20 | 5 | 7 | 8 | 8 | 9 | 9 | 9 |
| 30 | 9 | 13 | 16 | 17 | 18 | 19 | 19 |
| 40 | 14 | 21 | 25 | 28 | 31 | 33 | 33 |
| 50 | 19 | 29 | 36 | 40 | 45 | 48 | 50 |
| 60 | 24 | 37 | 47 | 54 | 62 | 67 | 69 |

a) *¿Cuáles son los significados de las derivadas parciales* $\dfrac{\partial h}{\partial v}, \dfrac{\partial h}{\partial t}$*?*

b) *Estime los valores de* $f_v(40,15)$ *y* $f_t(40,15)$*. ¿Cuáles son las interpretaciones prácticas de estos valores?*

c) *¿Cuál parece ser el valor del límite siguiente?*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\partial h}{\partial t}$$

2. *Si* $f$ *y* $g$ *son funciones de una sola variable derivables dos veces, demuestre que la función*

$$U(x,t) = f(x+at) + g(x-at)$$

*es una solución de la ecuación diferencial de onda*

$$U_{tt} = a^2 U_{xx}$$

3. *Si* $U = e^{a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n}$, *donde* $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = 1$, *demuestre que*

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 U}{\partial x_n^2} = U$$

4. *Mediante derivación implícita para determinar* $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ *y* $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

a) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$

b) $yz + x\,Ln(y) = z^2$

5. *En un estudio de penetración del congelamiento se encontró que la temperatura* $T$ *en el tiempo* $t$ *(medido en días) a una profundidad* $x$ *(medida en pies) se puede modelar con la función*

$$T(x,t) = T_0 + T_1\, e^{-\lambda x}\, \sin(\omega t - \lambda x)$$

*donde* $\omega = \dfrac{2\pi}{365}$ *y* $\lambda$ *es una constante positiva.*

a) *Determine* $\dfrac{\partial T}{\partial x}$. *¿Cuál es el significado físico?*

b) *Determine* $\dfrac{\partial T}{\partial t}$. *¿Cuál es el significado físico?*

c) *Demuestre que* $T$ *satisface con la ecuación del calor* $T_t = kT_{xx}$ *para una cierta constante* $k$.

d) *Si* $\lambda = 0{,}2$, $T_0 = 0$ *y* $T_1 = 10$, *mediante geogebra grafique* $T(x,t)$.

e) *¿Cuál es el significado físico del término* $\lambda x$ *en la expresión* $\sin(\omega t - \lambda x)$*?*

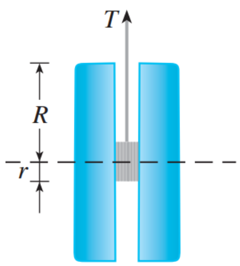
# Diferenciales

1. *El largo y el ancho de un rectángulo miden* 30 *cm y* 24 *cm respectivamente, con un error máximo en la medición de* 0,1 *cm en cada una de las dimensiones. Use diferenciales para estimar el error máximo en el área calculada del rectángulo.*

2. *La tensión* $T$ *en la cuerda del* ***yo-yo*** *en la figura es*

$$T = \frac{mgR}{2r^2 + R^2}$$

*donde* $m$ *es la masa del* ***yo-yo*** *y* $t$ *es la aceleración debida a la gravedad. Utilice diferenciales para estimar el cambio en la tensión si* $R$ *es incrementada de* 3 *cm a* 3,1 *cm y* $r$ *es incrementada de* 0,7 *cm a* 0,8 *cm ¿La tensión crece o decrece?*




3. *Un modelo para el área de la superficie del cuerpo humano está dado por la función*

$$S = f(w,h) = 0{,}1091\, w^{0{,}425}\, h^{0{,}725}$$

*donde* $w$ *es el peso (en libras),* $h$ *es la altura (en pulgadas), y* $S$ *es medida en pies cuadrados. Si los errores en la medición de* $w$ *y* $h$ *son a lo sumo un* 2 %, *use diferenciales para estimar el máximo error porcentual en el área superficial calculada.*

4. *Cuatro números positivos, cada uno menor de* 50, *se redondean a la primera cifra decimal, y luego se multiplican todos. Mediante diferenciales, estime el error máximo posible en el producto calculado que podría resultar por el redondeo.*

# Reglade la cadena

1. *Si* $z = f(x, y)$, *donde* $f$ *es derivable,*

$$\begin{aligned} x &= g(t) & y &= h(t) \\ g(3) &= 2 & h(3) &= 7 \\ g'(3) &= 5 & h'(3) &= -4 \\ f_x(2,7) &= 6 & f_y(2,7) &= -8 \end{aligned}$$

*determine* $\dfrac{dz}{dt}$ *cuando* $t = 3$.

2. *Si* $W(s, t) = F(u(s, t), v(s, t))$, *donde* $F, u, v$ *es derivable,*

$$\begin{aligned} u(1,0) &= 2 & v(1,0) &= 3 \\ u_s(1,0) &= -2 & v_s(1,0) &= 5 \\ u_t(1,0) &= 6 & v_t(1,0) &= 4 \\ F_u(2,3) &= -1 & F_v(2,3) &= 10 \end{aligned}$$

*determine* $W_s(1, 0)$ *y* $W_t(1, 0)$.

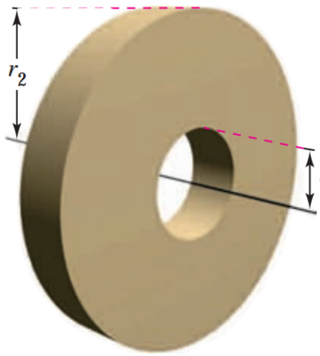
3. *Si* $z = f(x, y)$, *donde* $x = r\cos(\theta)$ *y* $y = r\sin(\theta)$, *determine:*

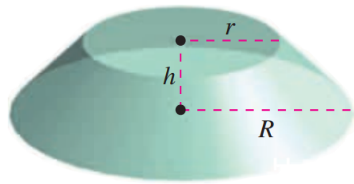
   a) $\dfrac{\partial z}{\partial r}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$

   b) *Demuestre que* $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\dfrac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$

4. *Un cilindro anular tiene un radio interior de* $r_1$ *y un radio exterior de* $r_2$ *(ver la figura). Su momento de inercia es* $I = \frac{1}{2}m(r_1^2 + r_2^2)$ *donde* $m$ *es la masa. Los dos radios se incrementan a razón de* 2 *centímetros por segundo. Hallar la velocidad al que varía* $I$ *en el instante en que los radios son* 6 *y* 8 *centímetros. (Suponer que la masa es constante.)*

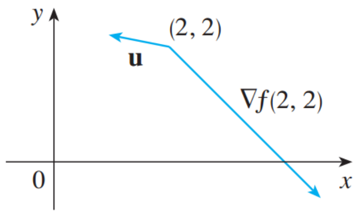
5. *Los dos radios del tronco de un cono circular recto se incrementan a razón de* 4 *centímetros por minuto y la altura se incrementa a razón de* 12 *centímetros por minuto (ver la figura). Hallar a qué velocidad cambian el volumen y el área superficial cuando los radios son* 15 *y* 25 *centímetros, respectivamente, y la altura es de* 10 *centímetros.*




# Derivada direccional y gradiente

1. *Use la figura para estimar* $D_u f(2,2)$.




2. *En las cercanías de una boya, la profundidad de un lago en el punto de coordenadas* $(x,y)$ *es* $z = 200 + 0{,}02x^2 - 0{,}001y^3$, *donde* $x, y$ *y* $z$ *se miden en metros. Un pescador en un bote pequeño parte del punto* $(80, 60)$ *y se dirige hacia la boya, la cual se ubica en* $(0,0)$. *¿El agua bajo el bote se hace más somera o más profunda cuando el pescador parte? Explique.*

3. *La temperatura* $T$ *en una bola de metal es inversamente proporcional a la distancia desde el centro de la bola, el cual se considera como el origen. La temperatura en el punto* $(1,2,2)$ *es* $120^\circ$.

   a) *Determine la razón de cambio de* $T$ *en* $(1,2,2)$ *en la dirección hacia el punto* $(2,1,3)$.

   b) *Demuestre que en cualquier punto en la bola la dirección de incremento más grande de temperatura está dado por un vector que apunta hacia el origen.*

4. *Suponga que en una cierta región del espacio el potencial eléctrico* $V$ *está dado por* $V(x,y,z) = 5x^2 - 3xy + xyz$.

   a) *Determine la razón de cambio del potencial en* $P(3,4,5)$ *en la dirección del vector* $\vec{v} = \hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k}$.

   b) *¿En qué dirección cambia* $V$ *con mayor rapidez en* $P$*?*

   c) *¿Cuál es la razón máxima de cambio en* $P$*?*

Nombre del estudiante:

# Máximos y mínimos

1. *Calcule la distancia más corta desde el punto* $(2, 0, -3)$ *al plano* $x + y + z = 1$.

2. *Calcule el volumen de la caja rectangular más grande en el primer octante con tres caras en los planos coordenados y un vértice en el plano* $x + 2y + 3z = 6$.

3. *Está en proceso de diseño un edificio rectangular para que minimice las pérdidas de calor. Los muros oriente y poniente pierden calor a razón de* 10 *unidades/*$m^2$ *por día, los muros del norte y del sur pierden* 8 *unidades/*$m^2$ *por día, el piso pierde* 1 *unidad/*$m^2$ *por día, y el techo pierde* 5 *unidades/*$m^2$ *por día. Cada muro debe medir por lo menos* 30 *m de largo, la altura debe ser por lo menos de* 4 *m y el volumen debe ser exactamente* 4,000 $m^3$.

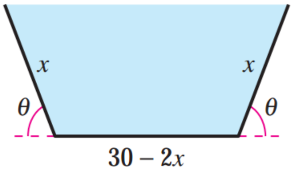
   a) *Determine y grafique el dominio de la pérdida de calor co mo una función del largo de los lados.*

   b) *Encuentre las dimensiones que minimizan la pérdida de calor. Compruebe tanto los puntos críticos como los puntos en el límite del dominio.*

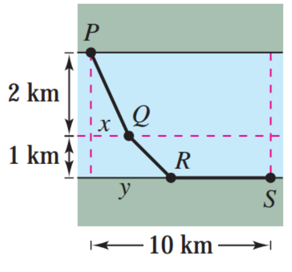
   b) *¿Podría diseñar un edificio con menos pérdida de calor si las restricciones de las longitudes de los muros se eliminaran?*

4. *Si la longitud de la diagonal de una caja rectangular debe ser* $L$, *¿cuál es el volumen más grande posible?*

5. *Un comedero de secciones transversales en forma de trapecio se forma doblando los extremos de una lámina de aluminio de* 30 *pulgadas de ancho (ver la figura). Hallar la sección transversal de área máxima.*




6. *Hay que construir un conducto para agua desde el punto* $P$ *al punto* $S$ *y debe atravesar regiones donde los costos de construcción difieren (ver la figura). El costo por kilómetro en dólares es* $3k$ *de* $P$ *a* $Q$, $2k$ *de* $Q$ *a* $R$ *y* $k$ *de* $R$ *a* $S$. *Hallar* $x$ *y* $y$ *tales que el costo total* $C$ *se minimice.*



# Integrales múltiples

1. *Plantee integrales iteradas para ambos órdenes de integración. Después evalúe la integral doble usando el orden más fácil y explique por qué es más fácil.*

   a) $\iint\limits_R y\,dA$, donde $R$ está acotada por $y = x - 2$, $x = y^2$.

   b) $\iint\limits_R y^2\,e^{xy}\,dA$, donde $R$ está acotada por $y = x$, $y = 4$, $x = 0$.

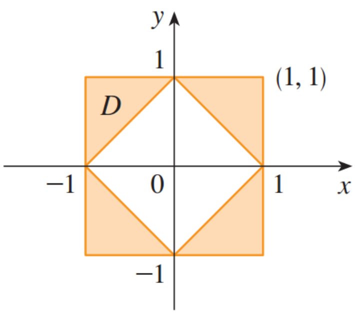
2. *Bosqueje la región de integración y cambie el orden de integración.*

   a) $\int_0^1 \int_0^y f(x,y)\,dx\,dy$

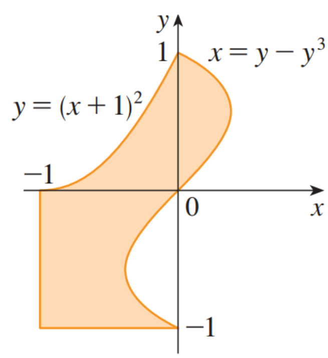
   b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos(x)} f(x,y)\,dy\,dx$

   c) $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy$

3. *Exprese a $D$ como una unión de regiones tipo $I$ o tipo $II$ y evalúe la integral.*




   a) $\iint\limits_D x^2\,dA$,




   b) $\iint\limits_D y\,dA$,

4. *Al evaluar una integral doble sobre una región $D$, se obtuvo una suma de integrales iteradas como sigue:*

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dA = \int_0^1 \int_0^{2y} f(x,y)\,dx\,dy + \int_1^3 \int_0^{3-y} f(x,y)\,dx\,dy$$

   *Bosqueje la región $D$ y exprese la integral doble como una integral iterada con orden inverso de integración.*

5. *La densidad de población en una ciudad se aproxima mediante el modelo*

$$f(x,y) = 4000e^{-0{,}01(x^2+y^2)},$$

   *con $x^2 + y^2 \leq 49$ donde $x$ yy se miden en millas. Integrar la función de densidad sobre la región circular indicada para aproximar la población de la ciudad.*

6. *Una alberca es circular con un diámetro de 40 pies. La profundidad es constante a lo largo de las líneas este-oeste y se incrementa en forma lineal desde 2 pies en el extremo sur hasta 7 pies en el extremo norte. Determine el volumen del agua en la alberca.*

7. a) *Se usa una broca cilíndrica con radio $r_1$ para hacer una perforación por el centro de una esfera de radio $r_2$. Encuentre el volumen del sólido en forma de anillo que queda.*

   b) *Exprese el volumen del inciso a) en términos de la altura $h$ del anillo. Observe que el volumen depende sólo de $h$, no de $r_1$ o $r_2$.*

8. *Utilice coordenadas polares para combinar la suma*

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{x} xy\,dy\,dx+\int_{1}^{\sqrt{2}}\int_{0}^{x} xy\,dy\,dx+\int_{\sqrt{2}}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} xy\,dy\,dx$$

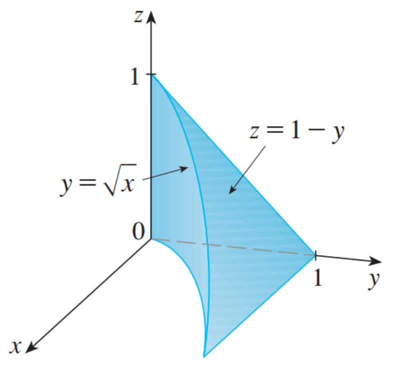
*dentro de una integral doble. Después evalúe la doble integral.*

9. *Una empresa produce un objeto esférico de 25 centímetros de radio. Se hace una perforación de 4 centímetros de radio a través del centro del objeto. Calcular a) el volumen del objeto y b) el área de la superficie exterior del objeto.*

10. *La figura muestra la región de integración para la integral*

$$\int_0^1\int_{\sqrt{x}}^{1}\int_{\sqrt{0}}^{1-y} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

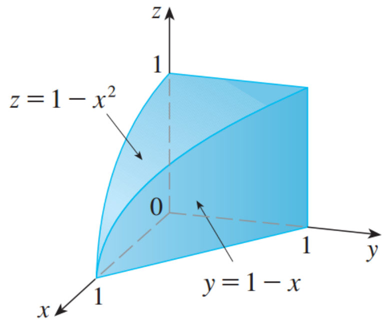
*Reescriba en los otros cinco órdenes esta integral como una integral iterada equivalente.*




11. *La figura muestra la región de integración para la integral*

$$\int_0^1\int_0^{1-x^2}\int_0^{1-x} f(x,y,z)\,dy\,dz\,dx$$

*Reescriba en los otros cinco órdenes esta integral como una integral iterada equivalente.*




12. *convertir la integral de coordenadas rectangulares a coordenadas cilíndricas y a coordenadas esféricas, y evaluar la integral iterada más sencilla.*

    a) $\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{4} x\,dz\,dy\,dx$

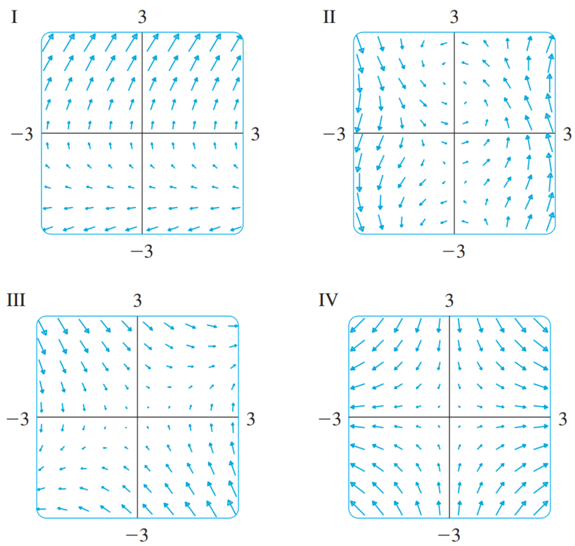
    b) $\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{16-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dz\,dy\,dx$

    c) $\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_{a}^{a+\sqrt{a^2-x^2-y^2}} x\,dz\,dy\,dx$

    d) $\int_{0}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz\,dy\,dx$

# Campos vectoriales

1. *Haga corresponder los campos vectoriales $F$ con las gráficas $I$ a $IV$. Dé razones para sus elecciones.*




a) $\mathbf{F}(x,y) = (x,-y)$

b) $\mathbf{F}(x,y) = (y,x-y)$

c) $\mathbf{F}(x,y) = (y,2+y)$

d) $\mathbf{F}(x,y) = (\cos(x+y),x)$

2. *Hallar el campo vectorial conservativo para la función potencial, encontrando su gradiente.*

   a) $f(x, y) = 5x^2 + 3xy + y^2$

   b) $g(x, y) = \sin(3x)\cos(4y)$

   c) $h(x, y, z) = \sqrt{x^2 + 4y^2 + x^2}$

   d) $r(x, y, z) = x \arcsin(yz)$

3. *Determinar si el campo vectorial es conservativo. Si lo es, calcular una función potencial para él.*

   a) $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{x\,\hat{i} + y\,\hat{j}}{x^2 + y^2}$

   b) $\mathbf{F}(x, y) = x\,e^{x^2 y}(2y\,\hat{i} + x\,\hat{j})$

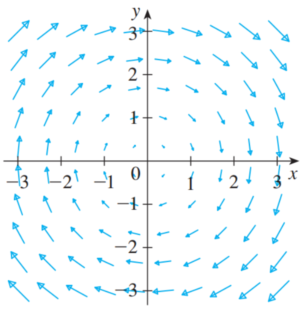
   c) $\mathbf{F}(x, y) = ye^z\,\hat{i} + ze^x\,\hat{j} + xe^y\,\hat{k}$

   d) $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{z}{y}\,\hat{i} - \dfrac{xz}{y^2}\,\hat{j} + \dfrac{x}{y}\,\hat{k}$

4. *Sea $\boldsymbol{F}$ el campo vectorial que se ilustra en la figura.*

   a) *Si $C_1$ es el segmento de recta vertical desde $(-3, -3)$ hasta $(-3, 3)$, determine si $\int_{C_1} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ es positiva, negativa o cero.*

   b) Si $C_2$ es la circunferencia orientada en el sentido contrario al de las manecillas del reloj con radio 3 y centro en el origen, determine si $\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es positiva, negativa o cero.




5. *Determinar el valor $c$ tal que el trabajo realizado por el campo de fuerzas*

$$\boldsymbol{F}(x, y) = 11[(4 - x^2 y)\hat{i} - xy\,\hat{j}]$$

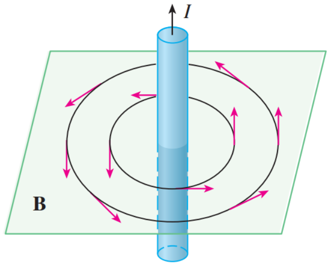
   *sobre un objeto que se mueve a lo largo de la trayectoria parabólica $y = c(1 - x^2)$ entre los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$ sea mínimo. Comparar el resultado con el trabajo requerido para mover el objeto a lo largo de la trayectoria recta que une esos dos puntos.*

6. *Los experimentos demuestran que una corriente estable $I$ en un alambre largo produce un campo magnético $\boldsymbol{B}$ que es tangente a cualquier circunferencia que quede en el plano perpendicular al alambre y cuyo centro es el eje del alambre (como se ve en la figura). La ley de Ampere relaciona la corriente eléctrica con sus efectos magnéticos y establece que*

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 I$$

*donde $I$ es la corriente neta que pasa por cualquier superficie acotada por una curva cerrada $C$ y $\mu_0$ es una constante que recibe el nombre de permeabilidad de espacio libre. Considere que $C$ es igual a una circunferencia de radio $r$, y demuestre que la magnitud $B = ||\boldsymbol{B}||$ del campo magnético a una distancia $r$ del centro del alambre es*

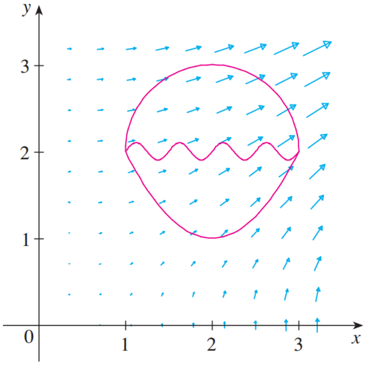
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$




7. *La figura muestra un campo vectorial $\boldsymbol{F}(x, y) = 2xy\,\hat{\imath} + x^2\,\hat{\jmath}$ y tres curvas que inician en $(1, 2)$ y terminan en $(3, 2)$.*

   a) *Explique por qué $\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ tiene el mismo valor para las tres curvas.*

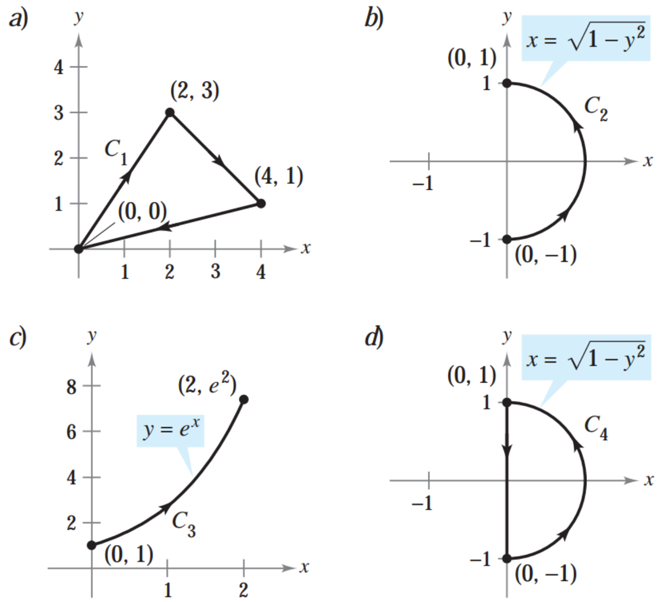
   b) *¿Cuál es este valor común?*



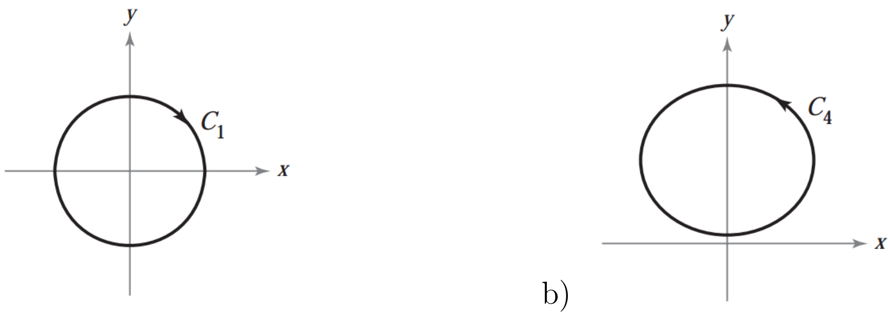

8. *Halle el valor de la integral de línea*

$$\int_C (2x - 3y + 1)\,dx - (3x + y - 5)\,dy$$

*para las siguientes curvas.*

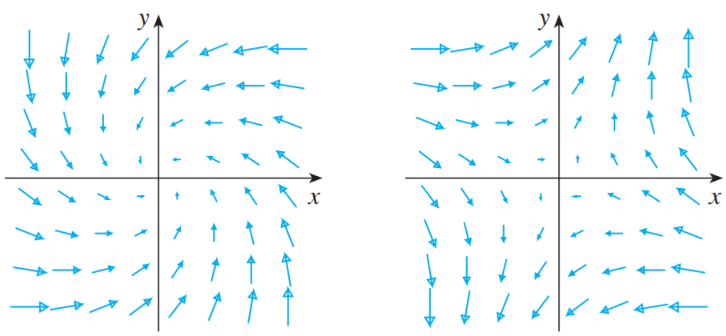



9. *Sea* $\boldsymbol{F}(x, y) = \dfrac{y}{x^2 + y^2}\hat{i} - \dfrac{x}{x^2 + y^2}\hat{j}$. *Encontrar el valor de la integral de línea* $\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$.




a) b)

10. ¿Son conservativos los campos vectoriales que se muestra en las figuras? Explique




11. *Una función* $f$ *es* armónica *si* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. *Demostrar que si* $f$ *es armónica, entonces*

$$\int_C \left( \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy \right) = 0$$

*donde* $C$ *es una curva suave cerrada en el plano.*

12. *Utilice el teorema de Green para encontrar el trabajo que realiza la fuerza* $\boldsymbol{F}(x,y) = x(x+y)\,\hat{\imath} + xy^2\,\hat{\jmath}$ *al desplazar una partícula desde el origen a lo largo del eje* $x$ *hasta* $(1,0)$, *luego a lo largo del segmento rectilíneo hasta* $(0,1)$ *y después regresa al origen por el eje* $y$.

13. Utilizar una integral de línea para hallar el área de la región $R$.

    a) $R$ : región acotada por la gráfica de $x^2 + y^2 = a^2$

    b) $R$ : región acotada por las gráficas de $y = x^2 + 1$ y $y = 2x - 3$

    c) El área de una región plana acotada por la trayectoria simple cerrada $C$ dada en coordenadas polares.

14. *En los siguientes ejercicios, determine el flujo de* $\boldsymbol{F}$ *a través de* $S$, *donde* $\boldsymbol{N}$ *es el vector unitario normal a* $S$ *dirigido hacia arriba.*

    a) $\mathbf{F}(x,y,z) = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath}$ y $S:\ z = 6 - 3x - 2y$ en el primer octante.

    b) $\mathbf{F}(x,y,z) = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}$ y $S:\ z = 1 - x^2 - y^2,\ z \geq 0$.

15. *El agua de mar tiene densidad de* $1025\,kg/m^3$ *y fluye con un campo de velocidad* $\boldsymbol{v} = y\,\hat{\imath} + x\,\hat{\jmath}$, *donde* $x, y$ *y* $z$ *se miden en metros y las componentes de* $\boldsymbol{v}$ *en metros por segundo. Encuentre el ritmo o tasa de flujo de la masa del fluido a través de la superficie semiesférica* $x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ z \geq 0$.

16. *Aunque introducimos la integral de superficie de un campo vectorial usando el ejemplo de flujo de fluidos, este concepto surge también en otras situaciones físicas. Por ejemplo, si* $\boldsymbol{E}$ *es un campo eléctrico , entonces la integral de superficie*

$$\iint_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S}$$

*recibe el nombre de flujo eléctrico de* $\boldsymbol{E}$ *a través de la superficie* $S$. *Una de las leyes importantes de la electrostática es la ley de Gauss, la cual establece que la carga neta encerrada por medio de una superficie cerrada* $S$ *es*

$$Q = \epsilon_0 \iint_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S}$$

*donde* $\epsilon_0$ *es una constante (que se denomina permitividad del espacio libre), y que depende de las unidades que se utilicen. (En el SI,* $\epsilon_0 \approx 8{,}8542 \times 10^{-12}\, C^2/N \cdot m^2$.*)*

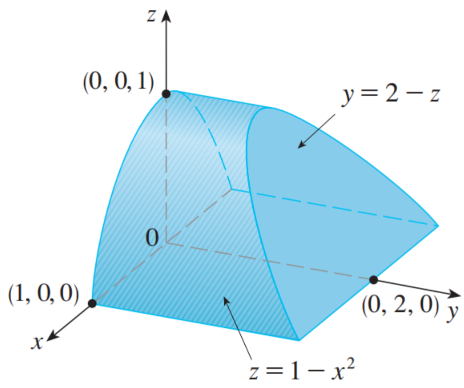
*Aplique la ley de Gauss para calcular la carga contenida en el hemisferio sólido* $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2,\ z \geq 0$ *, si el campo eléctrico es* $\boldsymbol{E}(x,y,z) = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + 2z\,\hat{k}$.

17. *Mediante el teorema de Stokes, calcule la integral* $\iint_S \mathrm{rot}\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}$, *donde* $\boldsymbol{F}(x,y,z) = xz\,\hat{\imath} + yz\,\hat{\jmath} + xy\,\hat{k}$ *y* $S$ *es la parte de la esfera* $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ *que está situada en el interior del cilindro* $x^2 + y^2 = 1$ *y encima del plano* $xy$.

18. *Un líquido es agitado en un recipiente cilíndrico de radio 1, de manera que su movimiento se describe por el campo de velocidad* $\boldsymbol{F}(x, y, z) = \hat{\imath} + \hat{\jmath} - zy\,\hat{k}$. *Halle la tendencia del fluido a circular alrededor de la frontera del recipiente*

19. *Determine el flujo del campo vectorial* $\boldsymbol{F}(x, y, z) = z\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + x\,\hat{k}$ *sobre la esfera unitaria centrada en el origen.*

20. *Determine el flujo del campo vectorial* $\boldsymbol{F}(x, y, z) = xy\,\hat{\imath} + (y^2 + e^{xz^2})\,\hat{\jmath} + \sin(xy)\,\hat{k}$ *sobre la superficie* $S$ *de la región* $Q$ *acotada por el cilindro parabólico* $z = 1 - x^2$ *y los planos* $z = 0$, *y* $y + z = 2$.



# Examen conceptual

*Determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué. Si es falso, explique por qué, o proporcione un ejemplo que contradiga el enunciado.*

1. $f_y(a,b) = \lim_{y\to b} \dfrac{f(a,y) - f(a,b)}{y - b}$

2. *Existe una función* $f$ *con derivadas parciales continuas de segundo orden tal que* $f_x(x,y) = x + y^2$ *y* $f_y(x,y) = x - y^2$.

3. *Si* $f(x,y) \to L$ *cuando* $(x,y) \to (a,b)$ *a lo largo de toda recta que pasa por* $(a,b)$, *entonces* $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$.

4. *Si* $f$ *tiene un mínimo local en* $(a,b)$ *y* $f$ *es derivable en* $(a,b)$, *entonces* $\nabla f(a,b) = \vec{0}$.

5. *Si* $f$ *es una función, entonces*
$$\lim_{(x,y)\to(2,5)} f(x,y) = f(2,5).$$

6. *Si* $f(x,y) = Ln(y)$, *entonces* $\nabla f(x,y) = \dfrac{1}{y}$.

7. *Si* $(2,1)$ *es un punto crítico de* $f$ *y*
$$f_{xx}(2,1)\cdot f_{yy}(2,1) < [f_{xy}(2,1)]^2$$
*entonces* $f$ *tiene un punto de silla en* $(2,1)$.

8. *Si* $f(x,y) = \sin(x) + \sin(y)$, *entonces* $-\sqrt{2} \leq D_u f(x,y) \leq \sqrt{2}$.

9. $\int_{-1}^{2}\int_{0}^{6} x^2 \sin(x-y)\,dx\,dy = \int_{0}^{6}\int_{-1}^{2} x^2 \sin(x-y)\,dy\,dx$

10. $\int_{0}^{1}\int_{0}^{x} \sqrt{x+y^2}\,dx\,dy = \int_{0}^{x}\int_{0}^{1} \sqrt{x+y^2}\,dy\,dx$

11. *Si* $f$ *es continua sobre* $[0,1]$, *entonces*
$$\int_0^1 \int_0^1 f(x)\,f(y)\,dy\,dx = \left[\int_0^1 f(x)\,dx\right]^2$$

12. *La integral*

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_r^{2r} dz\,dr\,d\theta$$

*representa el volumen encerrado por el cono* $z=\sqrt{x^2+y^2}$ *y el plano* $z=2$.

13. *Si* $\boldsymbol{F}$ *es un campo vectorial, entonces div* $\boldsymbol{F}$ *es un campo vectorial.*

14. *Si* $\boldsymbol{F}$ *es un campo vectorial, entonces rot* $\boldsymbol{F}$ *es un campo vectorial.*

15. *Si las derivadas parciales de* $f$ *de todos los órdenes son continuas sobre* $\mathbb{R}^3$, *entonces* $div(rot\,\nabla f)=0$.

16. *Si* $\boldsymbol{F}$ *y* $\boldsymbol{G}$ *son campos vectoriales tales que div* $\boldsymbol{F}=$ *div* $\boldsymbol{G}$, *entonces* $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{G}$.

17. *El trabajo realizado por un campo de fuerza conservativo al mover una partícula alrededor de una trayectoria cerrada es cero.*

18. *Si* $S$ *es una esfera y* $\boldsymbol{F}$ *un campo vectorial constante, entonces*

$$\iint\limits_S \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}=0$$