DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Universidad Autónoma de Occidente

CALIFICACIÓN

16 de mayo de 2019

Ecuaciones Diferenciales (131231 - GR 2)

Recopilación de ejercicios

Instrucciones. *Primero lea cuidadosa y detalladamente el taller, después, responda de manera clara y ordenada. Justifique todas las respuestas.*

Ejercicios Operacionales

1. *En cada uno de los siguientes ejercicios se presenta una ecuación diferencial y una función. Verificar que la función es solución de la ED. En cualquier caso, las C (con subíndice o sin él) que aparecen son constantes.*

a) $L\,\dfrac{di}{dt} + R\,i = E;$ $\qquad i = \dfrac{E}{R} + Ce^{-\frac{R}{L}t}$,con $L \neq 0,\ R \neq 0, E$ y C constantes

b) $xy\left[1 - \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right] = (x^2 - y^2 - a^2)\,\dfrac{dy}{dx};$ $\qquad y^2 = Cx^2 - \dfrac{a^2C}{1+C}$

c) $y' - y = e^{x+x^2};$ $\qquad y = Ce^x + e^x \int\limits_0^x e^{t^2}\,dt$

2. *En cada uno de los siguientes ejercicios, verificar que la función dada es solución general de la ED, después determinar la solución particular que satisfaga la condición dada.*

a) $x\dfrac{dy}{dx} + y = e^{-\frac{x^2}{2}}$, con $y(2) = -3;$ $\qquad y = \dfrac{C}{x} + \dfrac{1}{x}\int\limits_2^x e^{-\dfrac{t^2}{2}}\,dt$

b) $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$, con $y'(1) = 2$, $y(1) = 3;$ $\qquad y = C_1x^2 + C_2x^2Ln(x)$

3. *Algunos modelos en ED de la velocidad de un cuerpo en caída libre toman en cuenta la resistencia del aire al movimiento (esta resistencia opone una fuerza proporcional a alguna potencia de la velocidad v), y se representa por una ED de la forma*

$$\frac{dv}{dt} = a - bv^k,$$

Nombre del estudiante:

donde a, b, k son constantes.

a) *Haga un esbozo del campo de direcciones para a $a = k = 1$ y para $b = \frac{1}{10}$.*

b) *Con el campo de direcciones anterior, esboce las soluciones que corresponden a las condiciones iniciales $v(0) = 0, 5, 10$ y 15, respectivamente. El valor $v = 10$ se llama a menudo velocidad terminal o bien límite. ¿Puede ver porqué?*

4. *Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales usando el método de variables separables.*

   a) $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{(s^3 - s)(4t^3 - 6t)}{(3s^2 - 1)(t^4 - 3t^2)}$

   b) $x^2y' = 1 - x^2 + y^2 - x^2y^2$

   c) $\dfrac{2r - 1}{t}\,dr + \dfrac{r - 2r^2}{t^2 - 1}\,dt = 0$, con $r(2) = 4$

   d) $e^x\, y\, dy - (e^{-y} + e^{2x-y})\, dx = 0$

5. *Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales usando el método de factor integrante.*

   a) $L\, y' + R\, y = E\, \sin(\omega x)$, con $y(0) = 0$ y L, R, E, ω constantes.

   b) $x\, e^x\, y' + (x + 1)\, e^x\, y = 1$

   c) $(2x + 5)\,\dfrac{dy}{dx} + 10y = 10(2x + 5)$, con $y(0) = 0$.

   d) $y^2\, dx + (3xy - 4y^3)\, dy = 0$

6. *Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales homogéneas.*

   a) $(x^2 + y^2)\, dx - xy\, dy = 0$

   b) $(x + y)\, dx + (x + y - 4)\, dy = 0$, con $y(-1) = 0$

   c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y - x + 1}{y - x - 6}$

   d) $x\, dx + (y - 2x)\, dy = 0$

7.1 *Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales exactas.*

   a) $(3x^2 + 2xy^2 - 2x)\, dx + (3y^2 + 2x^2y - 2y)\, dy = 0$

   b) $(2xy - e^{2y} - 2x)\, dx + (x^2 + xe^{2y}y - y)\, dy = 0$

7.2 *Determinar los valores de las constantes A y B que hacen exacta a la ecuación diferencial*

$$(y^3 - y^2 \sin(x) - 2x)\, dx + (Axy^2 + By \cos(x) - 3y^2)\, dy = 0.$$

7.3 *Determinar una función $M(x, y)$ de modo tal que sea exacta la ecuación diferencial*

$$M(x, y)\, dx + (e^x \cos(y) + 2\cos(y))\, dy = 0.$$

8. *Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales Reduciéndolas a ecuaciones diferenciales de primer orden.*

a) $y\,y'' = (y')^2$

b) $y'' + (y')^2 = 1$

9. *Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales usando el método de Reducción de orden considerando que y_1 es una solución de ella.*

a) $y'' + 4y = 0$; $y_1 = \sin(2x)$

b) $y'' + 4y' + 13y = 0$; $y_1 = e^{-2x}\cos(3x)$

c) $xy'' + 2y' + xy = 0$; $y_1 = \dfrac{\sin x}{x}$

d) $xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0$; $y_1 = e^x$

10.1 *Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficientes constantes.*

a) $y'' + 16y = 0$; $y(0) = 2,\ y'(0) = -2$

b) $y'' + 4y' + 5y = 0$; $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

c) $4y'' + y = 0$

d) $4y'' - 4y' + y = 0$;

10.2 *Obtener una ED linea homogénea con coeficientes constantes que tenga por solución general.*

a) $y = C_1e^{-6x} + C_2e^{5x}$

b) $y = (C_1 + C_2x)e^{-8x}$

c) $y = e^{-2x}(C_1\cos(3x) + C_2\sin(3x))$

d) $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{3x} + C_3xe^{3x}$

11. *Utilizar la definición para hallar la transformada de Laplace de cada una de las siguientes funciones:*

a)
$$f(t) = \begin{cases} 3t & \text{si } t < 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leq t \end{cases}$$

b) $f(t) = e^{\frac{1}{5}t}$

12. *En cada uno de los ejercicios, calcular $\mathscr{L}\{f(t)\}$ o bien $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$, según se requiera*

a) $f(t) = e^{-3t}\sin(t)$

b) $f(t) = \cos^2(at)$

c) $F(s) = \dfrac{2}{(s+2)^4} + \dfrac{3}{s^2+16}$

d) $F(s) = \dfrac{3s+1}{s^2 - 4s + 20}$

13. *Resuelva los siguientes PVI usando el método de la transformada de Laplace.*

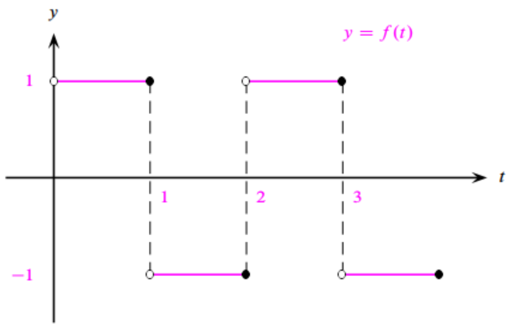
a) $\dfrac{d^3y}{dt^3} - \dfrac{d^2y}{dt^2} = 0$; $y(0) = 2,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 1.$

b) $y'' + 9y = 5t + 2$; $y(0) = 5$, $y'(0) = -1$

c) $y'' + 6y + 25y = 0$; $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$

d) $\dfrac{d^2x}{dx^2} + 3\dfrac{dx}{dt} + 2x = t$; $x(0) = x'(0) = 0$

14. *Calcular la transformada de Laplace de de la función f cuya gráfica se muestra en la siguiente figura:*



Aproximaciones Numéricas

1. *Determine una aproximación lineal de la solución $y(x)$ de cada una de los siguientes PVI en el punto indicado utilizando el h proporcionado. En los casos que se requiera, aplique dos veces el proceso de aproximación lineal.*

   a) $y' = xy + y$, con $y(4) = 1$ en $x = 4.2$, para $h = 0.2$

   b) $y' = 0.2y - 5y^2$, con $y(0) = 3$ en $x = 0.02$, para $h = 0.01$

   c) $y' = x^2 + 2x - y$ con $y(0) = 1$ en $x = 0.4$, para $h = 0.2$

   d) $y' = y^2 + 2y$ con $y(0) = 1$ en $x = 0.4$, para $h = 0.2$

2. *Considere las siguientes PVI. Determine una aproximación numérica de la solución en el punto indicado el método de Euler con el tamaño de paso señalado en cada caso. Utilice redondeo a cuatro cifras decimales en todos sus cálculos*

   a) $y' = x^2 + 2y$, con $y(1) = 5$. Calcule $y(1{,}5)$, para $h = 0.1$

   b) $y' = x^2 + y^2 + x^2y^2$ con $y(0) = 0$. Calcule $y(0{,}5)$, para $h = 0.1$

   c) $y' = 2x + 2y - 1$ con $y(1) = 1$. Calcule $y(1{,}5)$, para $h = 0.1$

   d) $y' = 3x - 2y$ con $y(1) = 1$. Calcule $y(1{,}5)$, para $h = 0.1$

3. *Determine una aproximación cuadrática mejorado de la solución $y(x)$ de cada una de los siguientes PVI utilizando el h proporcionado y calcule el error porcentual. En los casos que se requiera, aplique dos veces el proceso de aproximación cuadrática para obtener una estimación de la solución.*

   a) $y' = 2x - y$ con $y(0) = 3$ en $x = 0.2$, para $h = 0.2$

   b) $y' = x - xy$ con $y(1) = 2$ en $x = 1.1$, para $h = 0.1$

   c) $y' = y - x + 5$ con $y(1) = 1$ en $x = 1.2$, para $h = 0.1$

   d) $y' = x^2 - y$ con $y(0) = 3$ en $x = 0.4$, para $h = 0.2$

4. *Use el método de Euler Mejorado para determinar una aproximación numérica de la solución en el punto indicado de cada uno de los siguientes PVI; utilice el tamaño de paso proporcionado; redondee a cuatro cifras decimales en todos los cálculos*

    a) $y' = x^2 - y$, con $y(1) = 2$. Calcule $y(1{,}5)$, para $h = 0.1$

    b) $y' = \dfrac{x^2+4}{y}$ con $y(0) = 1$. Calcule $y(0{,}25)$, para $h = 0.05$

    c) $y' = x + 2y - 1$ con $y(2) = 1$. Calcule $y(2{,}5)$, para $h = 0.1$

    d) $y' = xy$ con $y(2) = 1$. Calcule $y(3)$, para $h = 0.2$

Aplicaciones de ED de primer orden

1. *La población de una comunidad aumenta con una rapidez proporcional a sí misma. Si la población inicial es de 2.000 y aumenta 10% en 5 años:*

    a) *¿Cuál será la población en t años?*

    b) *¿Qué porcentaje habrá aumentado en 10 años?*

    c) *¿Cuántos años deben transcurrir para que la población sea de 20.000 personas?*

2. *La temperatura de un motor en el momento en que se apaga es de 200 °C y la temperatura del aire que lo rodea es de 30 °C. Después de 10 min la temperatura del motor ha bajado a 180 °C. ¿Cuánto tiempo transcurrirá para que la temperatura del motor disminuya hasta 40 °C?*

3. *Un material cerámico se saca en cierto momento de un horno cuya temperatura es de 750 °C, para llevarlo a una segunda etapa de un proceso que requiere que el material se encuentre a una temperatura de cuando mucho 200 °C. Suponga que la temperatura de una sala de enfriamiento donde se colocará este cerámico es de 5 °C y que, después de 15 min, la temperatura del material es de 600 °C. ¿En cuánto tiempo el material cerámico estará listo para entrar a la segunda etapa de su proceso?*

4. *Un tanque contiene 100 gal de agua salada con 10 lb de sal disuelta. Agua salada con 1.5 lb de sal por galón entra al tanque a razón de 3 gal/min y la mezcla bien agitada sale a razón de 4 gal/min.*

    a) *Obtener la cantidad de sal en el tanque en cualquier tiempo* $t \geq 0$.

    b) *Determinar la cantidad de sal en el tanque después de 10 min.*

    c) *Calcular la concentración de sal en el tanque después de 20 min.*

    d) *Determinar la concentración de sal en el tanque, cuando hay solamente 10 gal de solución*

5. *Se bombea cerveza con un contenido de 8% de alcohol por galón a un tanque que inicialmente contiene 500 gal de cerveza con 6% de alcohol. La cerveza se bombea hacia el interior a razón de 5 gal/min en tanto que el líquido mezclado se extrae del tanque a razón de 6 gal/min.*

   a) *¿Qué cantidad de alcohol hay en el tanque después de t minutos?*

   b) *¿Cuál es el porcentaje de alcohol en el tanque después de 1 h?*

6. *Una piedra cae desde el reposo debido a la gravedad y con resistencia despreciable del aire.*

   a) *Mediante una ecuación diferencial, modelar el movimiento de la piedra.*

   b) *Determinar la velocidad (en m/s) de la piedra en cualquier instante $t \geq 0$.*

   c) *Calcular la posición (en metros) de la piedra en cualquier instante $t \geq 0$.*

   d) *Calcular la velocidad de la piedra y la distancia recorrida al cabo de 5 s.*

   e) *Determinar el tiempo en que la piedra alcanza una velocidad de 100 m/s.*

   f) *Calcular la distancia recorrida entre los segundos 6 y 8 así como entre los segundos 8 y 10.*

7. *Un hombre y su paracaídas pesan 160 lb y caen desde el reposo hacia la Tierra. Antes de que el paracaídas se abra, la resistencia del aire (en libras) es numéricamente igual a $\frac{1}{2}v$ (donde v es la velocidad instantánea en pies/s) y, a partir de que se abre, la resistencia es $\frac{5}{8}v^2$. Si el paracaídas se abre a los 5 s, calcular la velocidad del paracaidista en cualquier segundo t:*

   a) *Antes de abrirse el paracaídas-*

   b) *Después de abrirse el paracaídas.*

8. *Una bola de naftalina pierde masa por evaporación con una rapidez instantánea proporcional a su área superficial. Si la mitad de la masa se pierde en 100 días, ¿cuánto tiempo se necesita para que el radio disminuya a la mitad de su valor inicial?; ¿cuánto tiempo pasará hasta que la bola desaparezca por completo?*

9. *El gerente de una empresa de 5.000 trabajadores se encuentra en el extranjero cuando le señalan que un rumor sobre el cierre de ésta se propaga entre sus empleados y que, hasta entonces, aproximadamente 200 trabajadores lo han escuchado (y creído). El gerente requiere 10 días más para arreglar sus asuntos y le informan al cabo de 3 días que el rumor ha sido oído por 400 personas. Suponga que la tasa de cambio de las personas que han oído el rumor es proporcional al número de las que lo han oído y al de las que no lo han oído, y que el gerente tomará la decisión de regresar a la empresa para aclarar la situación sólo si el rumor es oído por 900 empleados pasados 7 días*

después de que él conoció la información. ¿Qué le recomendaría al gerente, suspender su viaje o continuarlo?

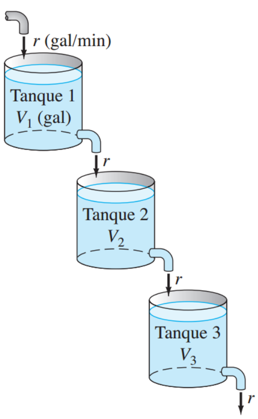
Aplicaciones de ED de orden superior

1. *Una masa m igual a 32 kg se suspende verticalmente de un resorte y, por esta razón, éste se alarga 39.2 cm. Determine la amplitud y el periodo de movimiento, si la masa se libera desde un punto situado 20 cm arriba de la posición de equilibrio, con una velocidad ascendente de 1 m/s. ¿Cuántos ciclos habrá completado la masa al final de 40 s?*

2. *Una masa de 1 kg se une a un resorte de constante $k = 4$ N/m. El medio ofrece una fuerza de amortiguamiento que es numéricamente igual a cinco veces la velocidad instantánea. La masa se libera desde un punto situado 0.3 m arriba de la posición de equilibrio, con una velocidad descendente de 2.4 m/s. Determine el tiempo en el que la masa pasa por la posición de equilibrio. Encuentre el tiempo en el que la masa alcanza su desplazamiento extremo. ¿Cuál es la posición de la masa en ese instante?*

Aplicaciones de los sistemas de ED

1. *La siguiente figura muestra tres tanques de salmuera conteniendo V_1, V_2 y V_3 gal de la solución, respectivamente. Agua fresca fluye hacia el tanque 1, mientras que la salmuera mezclada fluye desde el tanque 1 hasta el tanque 2, desde éste hacia el tanque 3 y sale finalmente de este último. Represéntese con $x_i(t)$ la cantidad (en lb) de sal en el tanque i en el tiempo t para $i = 1, 2$ y 3. Si cada razón de flujo es de r gal/min. obtenga el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden que modela el proceso anterior cuando $V_1 = 20\,gal, V_2 = 40\,gal, V_3 = 50\,gal, r = 10$ (gal/min) y las cantidades iniciales de sal en los tres tanques de salmuera, en lb, son $x_1(0) = 15, x_2(0) = x_3(0) = 0$.*



2. *En la siguiente figura se muestra un sistema* ***cerrado*** *de tres tanques de salmuera con volúmenes* V_1, V_2 *y* V_3*. La diferencia entre este sistema y el sistema* ***abierto*** *de la figuras anterior es que ahora el flujo que entra al tanque 1 es el que sale del tanque 3. Con la misma notación del problema anterior, obtenga el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden que modela el proceso anterior cuando* $V_1 = 50\,gal, V_2 = 25\,gal, V_3 = 50\,gal, r = 10$ *(gal/min) y las cantidades iniciales de sal en los tres tanques de salmuera, en lb, son* $x_1(0) = 15, x_2(0) = x_3(0) = 0$.