Movimiento Vibratorio Amortiguado

Vamos a considerar ahora el efecto de la resistencia del medio sobre la masa. Supongamos que sobre el cuerpo actúa una fuerza amortiguadora, dada por un múltiplo constante de la velocidad $\frac{dx}{dt}$.

De la segunda ley de Newton, en ausencia de fuerzas externas, se sigue que

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \beta\frac{dx}{dt},$$

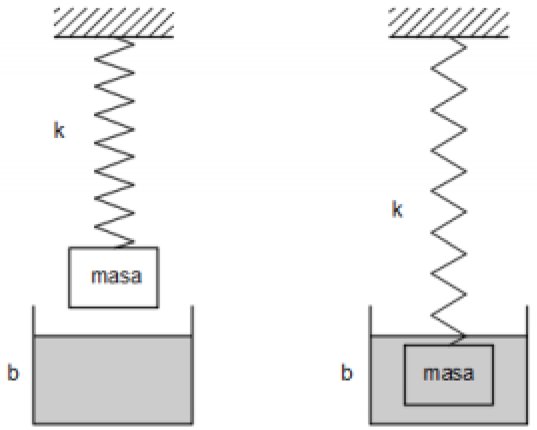


Figura 2 Ejemplo de un dispositivo amortiguador.

donde β es una **constante de amortiguación** positiva y el signo se debe a que la fuerza amortiguadora actúa en dirección opuesta al movimiento. Obtenemos así la ecuación diferencial del **movimiento vibratorio amortiguado libre**

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\beta}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0,$$

o bien

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0,$$

con $2\lambda = \beta/m$ y $\omega^2 = k/m$.

La ecuación auxiliar de (5.13) es

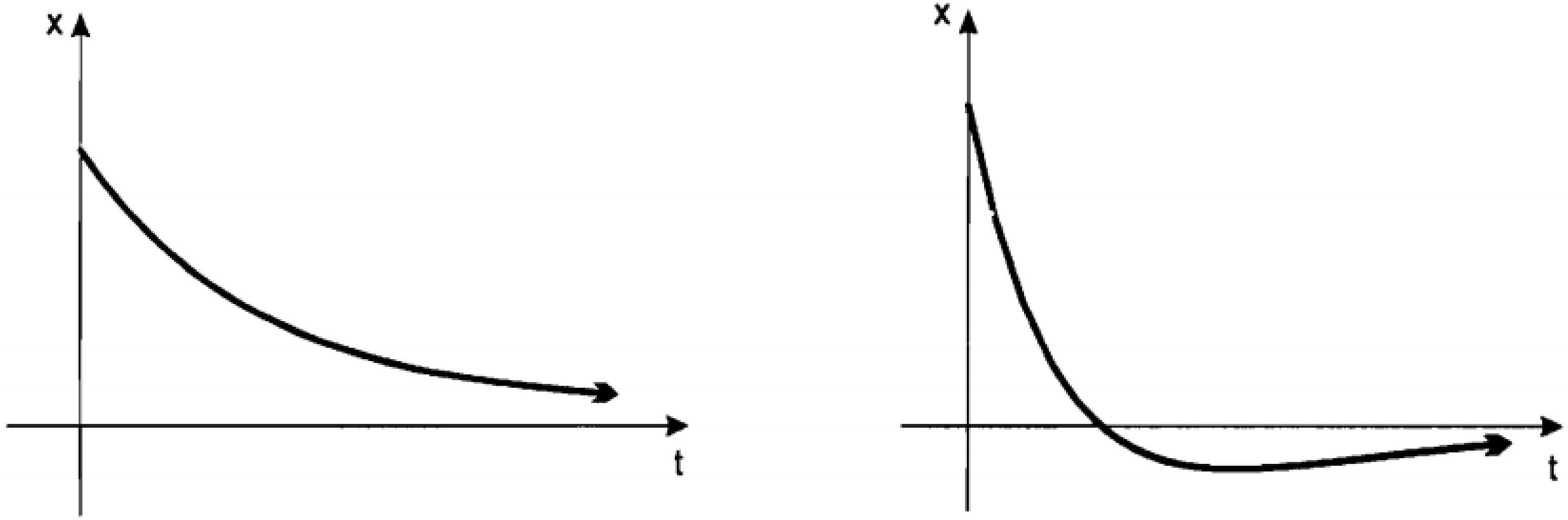
$$r^2 + 2\lambda r + \omega^2 = 0,$$

cuyas raíces están dadas por

$$r_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}, \qquad r_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}.$$

Dependiendo del valor de $\lambda^2 - \omega^2$, distinguimos los tres casos siguientes.

CASO I. Movimiento Sobre-Amortiguado. Si $\lambda^2 - \omega^2 > 0$,



representa un movimiento suave y no oscilatorio.

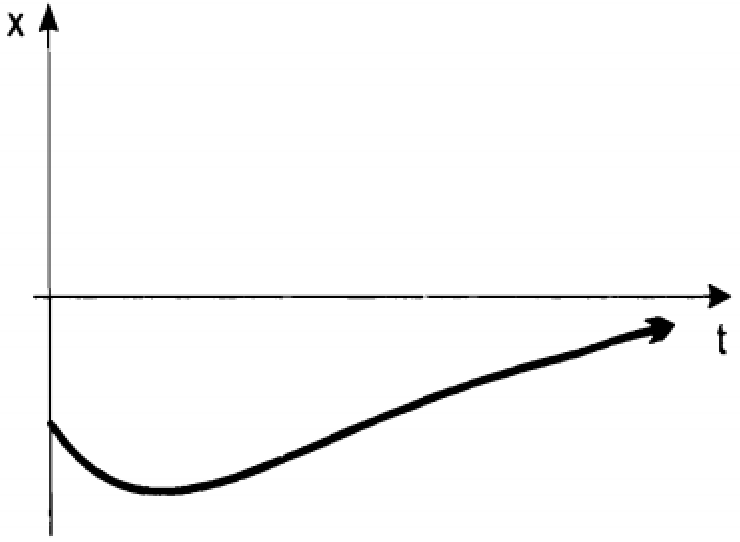
EJEMPLO 1. Se encontró experimentalmente que un cuerpo de 4 lb estira un resorte 6 pulgadas. El medio ofrece una resistencia al movimiento del cuerpo numéricamente igual a 2.5 veces la velocidad instantánea. Encuentre la ecuación del movimiento si el peso se desplaza 4 pulgadas por debajo de la posición de equilibrio y se suelta.

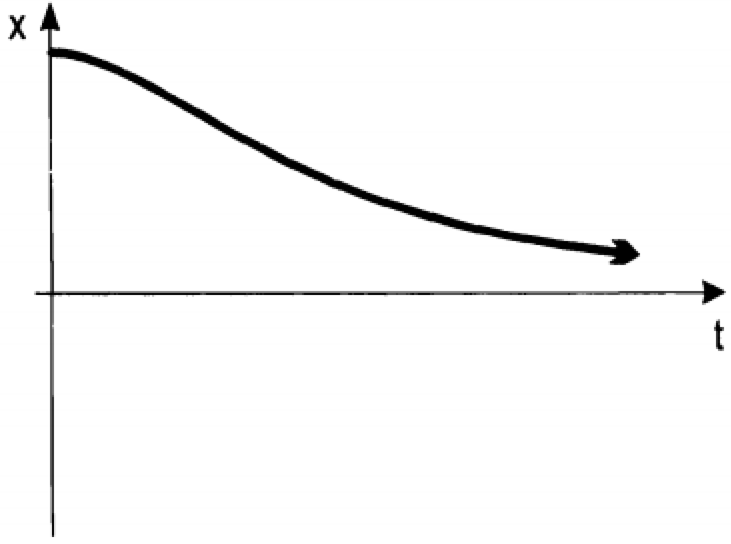
EJEMPLO 2. Resuelva nuevamente el ejemplo 1, suponiendo ahora que $\beta = 2$.

EJEMPLO 3. Si en el ejemplo 2 se cambian las condiciones iniciales a $x(0) = 0$ y $x'(0) = 1/3$, determine $x(t)$.

EJEMPLO 4. Tomando en cuenta que $\beta = 1$ repita el ejemplo 1. Escriba la solución en la forma alternativa (5.18). Determine los instantes en los que el cuerpo pasa por la posición de equilibrio y realice la gráfica de la ecuación del movimiento.

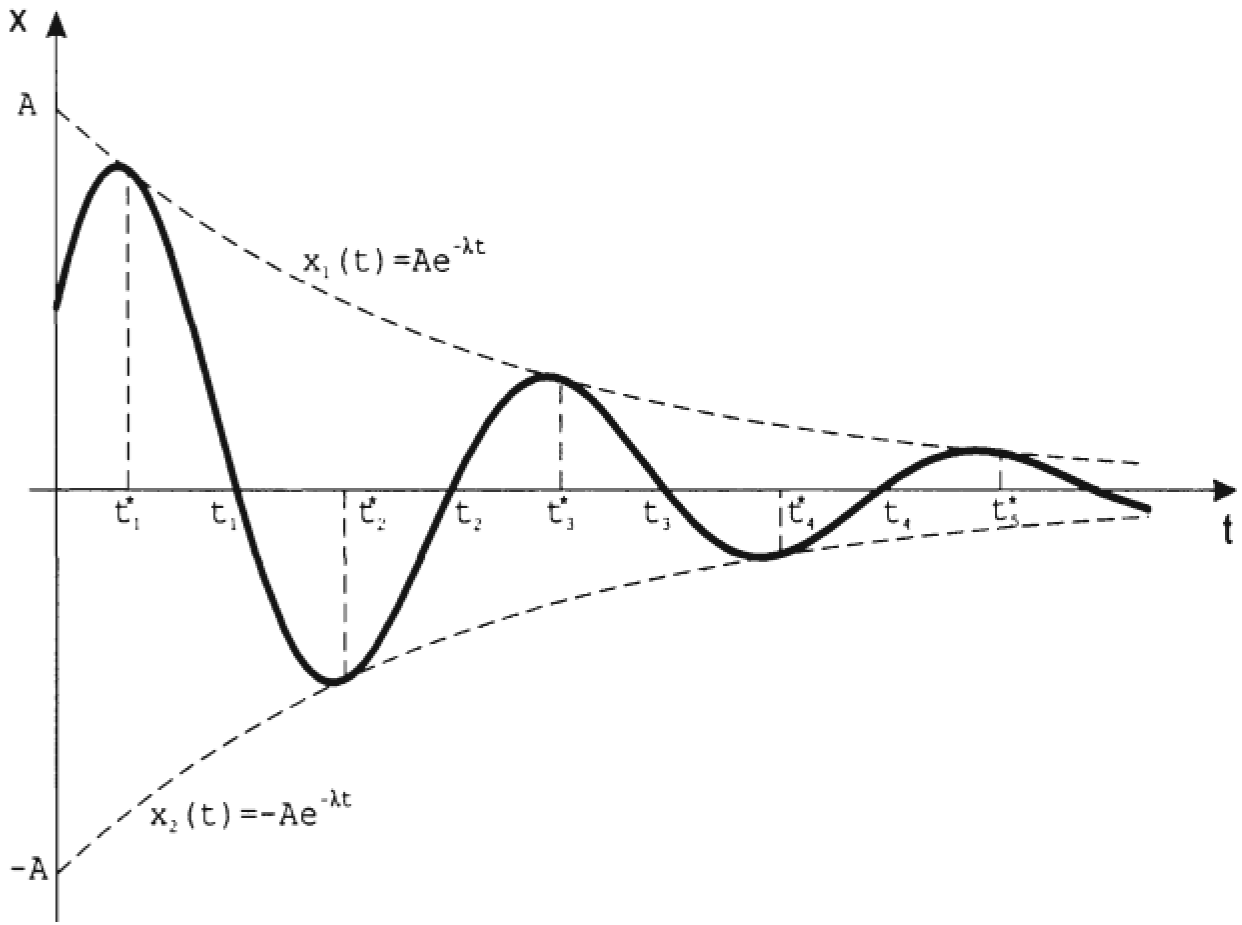
CASO II. Movimiento Críticamente Amortiguado. Si $\lambda^2 - \omega^2 = 0$





En esta situación, una pequeña disminución de la fuerza de amortiguamiento produciría un movimiento oscilatorio.

CASO III. Movimiento Subamortiguado. Si $\lambda^2 - \omega^2 < 0$,



Ahora, el movimiento es oscilatorio, pero la amplitud de las oscilaciones tiende a cero cuando t tiende a infinito.