1. Números Reales

Aceptaremos la existencia de un conjunto llamado *conjunto de números reales* y denotado por $\mathbb{R}$. Los números reales se emplean en todas las áreas de la matemática y sus aplicaciones.

Sobre R se define una relación de igualdad que verifica las siguientes propiedades

Definición 1.1: Relación de igualdad

- Para todo $a \in \mathbb{R}$ se tiene que $a = a$. (*Reflexión*)
- Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ si $a = b$ entonces $b = a$. (*Simétrica*)
- Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$ si $a = b$ y $b = c$ entonces $a = c$. (*Transitiva*)

Además el conjunto de los números reales es cerrado respecto a las operaciones de adición o suma (denotada por $+$) y multiplicación o producto (denotada por $\cdot$). Esto significa que dados dos números reales cualesquiera, la suma y la multiplicación de ellos es también un número real. Estas operaciones satisfacen las siguientes propiedades, llamadas *Axiomas de Cuerpo*.

Definición 1.2: Axiomas de cuerpo

Dados a, b y c números reales arbitrarios, se verifican:

- **Conmutativa** $a + b = b + a$ $a \cdot b = b \cdot c$
- **Asociativa** $a + (b + c) = (a + b) + c$ $a \cdot (b \cdot c) = a \cdot (b \cdot c)$
- **Elemento Neutro** $a + 0 = a$ $a \cdot 1 = a$
- **Elemento Inverso** $a + (-a) = 0$ $a \cdot a^{-1} = 1$, si $a \neq 0$
- **Distributiva** $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ $a \cdot (b \cdot c) = a \cdot (b \cdot c)$

Note que 0 no tiene inverso multiplicativo ya que no existe un número que multiplicado por cero dé uno.

A partir de la suma, se define la resta

$$a - b = a + (-b).$$

En forma semejante, se define la división en términos de la multiplicación, para $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$,

$$a \div b = a \cdot b^{-1}.$$

Es común denotar la división por $\dfrac{a}{b}$, de donde, si $b \neq 0$ tenemos $b^{-1} = \dfrac{1}{b}$.

A continuación se listan algunas importantes propiedades válidas en los números reales. La demostración de ellas, son consecuencia de los axiomas de cuerpo.

Ejemplo 1.1: Propiedades

Para a, b, c y d números reales arbitrarios se verifican:

- $a \cdot 0 = 0$
- $a = b$ si y sólo si $a + c = b + c$
- si $c \neq 0$, se tiene $a = b$ si sólo si $a \cdot c = b \cdot c$
- $a \cdot b = 0$ si y sólo si $a = 0$ o $b = 0$
- $-(-a) = a$
- $-(a + b) = -a - b$
- $-(a \cdot b) = (-a) \cdot b = a \cdot (-b)$
- Para $a \neq 0$ se tiene que $(a^{-1})^{-1} = a$
- Para $a, b \neq 0$ se tiene que $(a \cdot b) = a^{-1} \cdot b^{-1}$
- Para $b, d \neq 0$ se tiene que $\dfrac{a}{b} \pm \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad \pm bc}{bd}$ y $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$
- Si $b, c, d \neq 0$ se tiene que $\dfrac{a}{b} \div \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad}{bc}$

Una aplicación importante de la axiomatica en $\mathbb{R}$ es simplificar expresiones y encontrar soluciones de ecuaciones. Consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2: Simplificación de expresiones

Muestre

$$(1 - (1 + x^{-1})^{-1})^{-1} = x + 1$$

Solución.

$$\begin{aligned}
\left(1 - (1 + x^{-1})^{-1}\right)^{-1} &= \left(1 - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-1}\right)^{-1} \\
&= \left(1 - \left(\frac{x+1}{x}\right)^{-1}\right)^{-1} \\
&= \left(1 - \frac{x}{x+1}\right)^{-1} \\
&= \left(\frac{x+1-x}{x+1}\right)^{-1} \\
&= \left(\frac{1}{x+1}\right)^{-1} \\
&= x + 1
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.3: Solución a ecuaciones

Resuelva la ecuación $(3x+5)+2(x+7) = 9x+1$ indicando las propiedades utilizadas.
Solución.

$$\begin{aligned}
(3x+5)+2(x+7) &= 9x+1 \\
(3x+5)+2x+14 &= 9x+1 && \text{Propiedad distributiva} \\
(3x+2x)+(5+14) &= 9x+1 && \text{Propiedad asociativa y conmutativa} \\
5x+19 &= 9x+1 \\
(5x+19)-1 &= (9x+1)-1 && \text{Propiedad uniforme} \\
5x+(19-1) &= 9x+(1-1) && \text{Propiedad asociativa} \\
5x+18 &= 9x+0 && \text{Inverso aditivo} \\
5x+18 &= 9x && \text{Neutro aditivo} \\
(5x+18)-5x &= 9x-5x && \text{Propiedad uniforme} \\
(5x-5x)+18 &= 4x && \text{Propiedad asociativa y conmutativa} \\
0+18 &= 4x && \text{Inverso aditivo} \\
18 &= 4x && \text{Neutro aditivo} \\
18\cdot\frac{1}{4} &= 4x\cdot\frac{1}{4} && \text{Propiedad uniforme} \\
18\cdot\frac{1}{4} &= \frac{1}{4}\cdot 4x && \text{Propiedad conmutativa} \\
\frac{18}{4} &= 1\cdot x && \text{Inverso multiplicativo} \\
\frac{9}{2} &= x && \text{Neutro multiplicativo}
\end{aligned}$$

OBSERVACIÓN. El propósito del ejercicio anterior es resaltar las propiedades de la estructura algebraica de los números reales, en la practica la ecuación se resuelve omitiendo todos los detalles.

$$\begin{aligned}
(3x+5)+2(x+7) &= 9x+1 \\
3x+5+2x+14 &= 9x+1 \\
5x+19 &= 9x+1 \\
5x-9x &= 1-19 \\
-4x &= -18 \\
x &= \frac{9}{2}
\end{aligned}$$

Ejercicios 1.1: Solución a ecuaciones

1. Un farmacéutico debe preparar 15 ml de unas gotas para los ojos para un paciente con glaucoma. La solución de las gotas debe contener $2\,\%$ de un ingrediente activo, pero el farmacéutico sólo tiene una solución al $10\,\%$ y otra al $1\,\%$ en su almacén ¿Qué cantidad de cada tipo de solución debe usar para preparar la receta?

2. El costo de producir cierto insumo médico es de \$54,000 y depende de la materia prima y de la mano de obra. Si el costo de materia prima es el triple del costo de la mano de obra, ¿cuál es el costo de cada una de ella?

3. ¿Cuál debe ser el valor de A para que la ecuación $2x - A + 4 = 3x + 7 - 5A$ tenga como solución $x = 5$?

4. Se invierten \$200,000 al $4\,\%$ mensual. ¿Cuánto dinero adicional se debe invertir al $4{,}5\,\%$ mensual si se requiere que al final del mes los intereses sean de \$10,000?

5. El precio de la boleta para un partido de la Liga Colombiana de fútbol en la ciudad de Cali es de \$35,000 en oriental alta y de \$25,000 en oriental baja. Si se vendieron 12,000 boletas en esta tribuna, para un total de 350 millones de pesos, ¿cuántas personas entraron en cada sección?

2. Axiomas de orden e Inecuaciones

Aceptaremos la existencia de un subconjunto de los números reales llamado *conjunto de números reales positivos* y denotado por $\mathbb{R}^+$. En este conjunto la suma y la multiplicación de reales positivos es también un número real positivo y se cumple la siguiente afirmación.

Dado $a \in \mathbb{R}$, se verifica sólo una de las siguientes propiedades

- $a \in \mathbb{R}^+$
- $a = 0$
- $-a \in \mathbb{R}^+$

Durante muchos años el álgebra se ha ocupado principalmente de la solución de ecuaciones. Recientemente, el estudio de las desigualdades ha alcanzado el mismo nivel de importancia debido a sus variadas aplicaciones. Tenemos la siguiente definición

Definición 2.1: Relación de desigualdad

Dados $a, b \in \mathbb{R}$ diremos que a es menor que b, que se denota por $a < b$, si $b - a \in \mathbb{R}^+$.

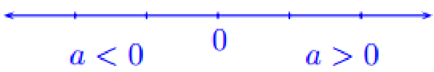
Suponga que $a, b \in \mathbb{R}$. Se verifica sólo una de las siguientes afirmaciones:

- $a < b$
- $a = 0$
- $b < a$

En particular, si ponemos $a \in \mathbb{R}$ y $b = 0$ en la afirmación anterior, obtenemos una de las siguientes alternativas:

- $a < 0$
- $a = 0$
- $0 < a$

Los números reales que verifican $a < 0$ son llamados números reales negativos y se anotan $\mathbb{R}^-$. De esta forma tenemos un orden en los números reales, representados en una recta numérica.



La afirmación $a < b$, nos dice que, en la recta a se encuentra a la izquierda de b. La afirmación $a = b$ nos indica que a y b coinciden. Por otra parte, si a se encuentra a la derecha de b, decimos que a es mayor que b, escribiendo $a > b$, los enunciados $a > b$ y $b < a$ significan lo mismo.

El símbolo $a \leq b$ nos indica que a es *menor o igual* a b. Análogamente, $a \geq b$ nos dice que a es *mayor o igual* a b. Las desigualdades, verifican las siguientes propiedades. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ entonces:

- $a^2 \geq 0$
- $a \leq b$ si y sólo si $a + c \leq b + c$
- Si $c > 0$, tenemos $a \leq b$ si y sólo si $a \cdot c \leq b \cdot c$
- Si $c < 0$, tenemos $a \leq b$ si y sólo si $a \cdot c \geq b \cdot c$
- $a \cdot b \geq 0$ si y sólo si $(a \geq 0 \wedge b \geq 0)$ ó $(a \leq 0 \wedge b \leq 0)$
- $a \cdot b \leq 0$ si y sólo si $(a \leq 0 \wedge b \geq 0)$ ó $(a \geq 0 \wedge b \leq 0)$
- Si $0 \leq a \leq b$ y $n > 0$, entonces $a^n \leq b^n$ y $\sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{b}$.

Definición 2.2: Intervalos

Sean a y b números reales con $a < b$. Los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ son llamados *intervalos*:

$[a, b] = \{ x \in \mathbb{R} \ : \ a \leqslant x \leqslant b \}$

$]a, b[= \{ x \in \mathbb{R} \ : \ a < x < b \}$

$[a, b[= \{ x \in \mathbb{R} \ : \ a \leqslant x < b \}$

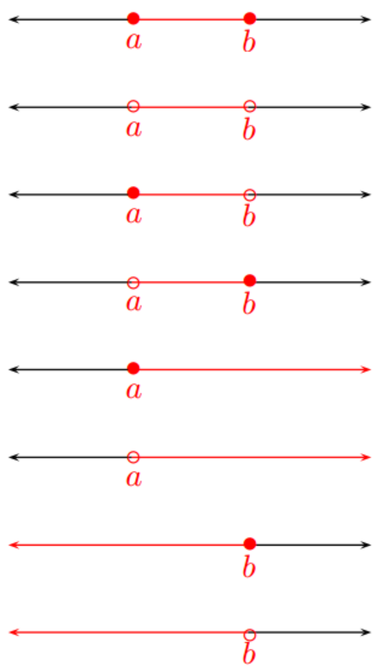
$]a, b] = \{ x \in \mathbb{R} \ : \ a < x \leqslant b \}$

$[a, +\infty[= \{ x \in \mathbb{R} \ : \ a \leqslant x \}$

$]a, +\infty[= \{ x \in \mathbb{R} \ : \ a < x \}$

$]-\infty, b] = \{ x \in \mathbb{R} \ : \ x \leqslant b \}$

$]-\infty, b[= \{ x \in \mathbb{R} \ : \ x < b \}$



Usaremos estas representaciones de conjuntos para escribir las soluciones de inecuaciones.

Definición 2.3: Inecuación

Una inecuación es una desigualdad en la que aparecen una o más incógnitas.

Ejemplo 2.1: Solución de inecuaciones

Resuelva la inecuación $x(x-2) > 8$.
Solución. Aplicando la propiedad distributiva se obtiene $x^2 - 2x > 8)$, sumando (-8) en ambos miembros obtenemos $x^2 - 2x + (-8) > 8 + (-8)$, así $x^2 - 2x - 8 > 0$.
Factorizando $(x+2)(x-4) > 0$.
Lo anterior es equivalente a

$$(x+2 > 0 \wedge x-4 > 0) \quad \text{ó} \quad (x+2 < 0 \wedge x-4 < 0)$$

de donde

$$(x > -2 \wedge x > 4) \quad \text{ó} \quad (x < -2 \wedge x < 4)$$

por lo tanto,

$$x > 4 \quad \text{ó} \quad x < -2$$

Así, el conjunto solución de la desigualdades $(-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$.

Ejercicios 2.1: Ejercicios de aplicación

1. La concentración de cierto calmante suministrado mediante suero, varía en su efectividad en el tiempo según la expresión
$$C = t^2 - 2t + 5,$$
donde C se mide en miligramos por litro y el tiempo t en horas. Se determinó que el calmante no produce daños colaterales y es efectivo si la concentración es de por lo menos 8 miligramos por litro y a lo más 13 miligramos por litro. ¿Durante cuánto tiempo es efectivo el calmante?

2. Un paciente recibió inulina para medir su tasa de filtración glomerular $[TFG]$. En el curso de la medición, la tasa de flujo urinario se modifica deliberadamente dándole a beber grandes cantidades de agua. La concentración plasmática de inulina (mg/ml), $[P]$, se mantiene constante a 1.5 mg/ml mediante venoclisis. La tasa de flujo urinario V es constante a 2 ml/min. Si $[TFG] = \frac{[U]\cdot V}{[P]}$ varía entre 90 y 100 ml/min antes y después de ingerir agua, ¿como varía la concentración de inulina, $[U]$, en la orina?

3. Al realizar un estudio en un sector minero se encontró un gran porcentaje de personas con niveles elevados de plomo en la sangre. El instituto de salud publica decidió comenzar un tratamiento con un costoso medicamento a las personas que tengan un 6 % de sangre contaminada. El porcentaje que describe la cantidad del plomo en la sangre como efecto de x gramos del medicamento, viene dado por la relación
$$P = \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + x + 1},$$
con P expresado en porcentaje. ¿Al menos cuántos gramos deben administrarse para que el porcentaje de plomo sea menor que 2 %?

4. Se ha establecido que el virus sinsicial respiratorio que ataca preferentemente a los niños se debe a dos factores que son: la posibilidad de contagio $C = 2x^2 - 5x + 4$, la disminución de ciertas vitaminas en el organismo $V = x^2 + 6x - 8$. Ambas expresiones dependen de la edad x. Si se estima que los mayores trastornos producidos por este virus se producen cuando la diferencia entre ambos factores es menor que 12. ¿Cuáles son las edades de mayor riesgo para contraer esta enfermedad?

5. Se espera que la población P de una ciudad (en miles) crezca de acuerdo a $P = 15 + \sqrt{3t + 2}$, en donde el tiempo t está medido en años. ¿Después de cuánto tiempo la población será de al menos 20 mil personas?