1. CONJUNTOS Y ELEMENTOS

La primera formulación de la teoría de conjuntos aparece con los trabajos de George Cantor (1845-1918), quien desarrolló la parte principal de la teoría como un subproducto de sus investigaciones sobre series trigonométricas. La teoría de conjuntos trajo claridad y precisión a la exposición de muchas teorías y áreas de la matemática, como la teoría de las probabilidades, la topología, la teoría de los grupos, etcétera.

Supóngase que el proceso mental que une objetos según una característica particular brinda un conocimiento intuitivo adecuado de lo que entendemos por conjunto. Los objetos reunidos de esta manera se llaman elementos y decimos que éstos pertenecen al conjunto.

En general representamos los elementos con letras minúsculas $a, b, c, ..., x, y, z$ y los conjuntos con letras mayúsculas $A, B, ...$ Cuando un elemento a pertenece al conjunto A se denota por:

$$a \in A \quad (a \text{ pertenece a } A)$$

El símbolo $\in$ representa la relación fundamental de la teoría de conjuntos, la relación de pertenencia. Ésta es la relación entre un elemento y un conjunto. Para expresar que el elemento a no pertenece al conjunto A se representa con:

$$a \notin A \quad (a \text{ no pertenece a } A)$$

Definición 1.1: Conjuntos y elementos

Un conjunto es una colección bien definida de objetos, llamados sus elementos. Los conjuntos se simbolizan con letras mayúsculas $A, B, ...$ Los objetos que componen el conjunto se denominan **elementos** o miembros y se denotan con letras minúsculas $a, b, ...$

Si la característica particular que observamos en una colectividad es la de estar en el mismo curso de matemática, entonces esa colectividad constituye un conjunto y cada uno de los compañeros de clase de matemática es un elemento del conjunto.

Hay dos formas de escribir los conjuntos; la primera de ellas sigue el principio de **extensión**, por el cual podemos determinar el conjunto enumerando todos sus elementos. La segunda sigue el principio de **comprensión** o abstracción, por el cual es posible determinar un conjunto identificando sus elementos mediante una propiedad común a ellos.

Definición 1.2: Descripción de conjuntos por extensión y por comprensión

Para escribir un conjunto por **extensión**, se enumeran todos sus elementos separándolos con comas y luego se encierran entre llaves {...}.

Para escribir un conjunto por **comprensión** se elige un elemento arbitrario x y se señala que cumple la propiedad $P(x)$. Finalmente, se encierra toda la expresión entre llaves:

$$A = \{x|xP(x)\}$$

que se lee A *es el conjunto de todos los elementos* x *tales que los* x *cumplen la propiedad* $P(x)$.

Ejemplo 1.1: Conjuntos

El conjunto de los primeros cinco números enteros positivos puede escribirse por extensión:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

pero también se puede escribir por comprensión:

$$A = \{x|x \text{ es uno de los primeros cinco enteros positivos }\}$$

Escribimos un conjunto por **extensión** cuando tiene un número reducido de elementos, y lo escribimos por **comprensión** cuando tiene un número grande de elementos.

Ejemplo 1.2: Notación de conjuntos por extensión

Escriba por extensión el conjunto

$$A = \{x|\text{es una vocal del español}\}$$

Solución. $A = \{a, e, i, o, u\}$

Definición 1.3: Conjuntos iguales

Decimos que dos conjuntos A y B son iguales si tienen los mismos elementos. Para indicar A y B son iguales se escribe:

$$A = B$$

Ejemplo 1.3: Conjuntos iguales

Los conjuntos

$$A = \{x | x^2 = 4\}$$

y

$$B = \{x | x \text{ es un número par distinto de cero entre } -3 \text{ y } 3\}$$

son iguales, ya que tienen los mismos elementos $A = \{-2, 2\}$ y $B = \{-2, 2\}$.

Ejercicios 1.1:

1. Describir por extensión cuando sea posible cada uno de los siguientes conjuntos:
   a) $A = \{x | x \text{ es un país del continente americano cuyo nombre comienza con } P\}$
   b) $B = \{x | x \text{ es un entero positivo tal que } 4 + x^2 = 20\}$
   c) $C = \{x | x \text{ es un multiplo positivo de } 7\}$
   d) $D = \{x | x \text{ es un entero positivo par menor que } 19\}$
2. Describir por comprensión cuando sea posible cada uno de los siguientes conjuntos:
   a) $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ...\}$
   b) $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, ...\}$
   c) $C = \{4, 9, 16, ...\}$
   d) $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Ejemplo 1.4: Ejemplo para la clase

En una población se encuesto a 10000 personas que utilizan vacunas para la influenza, elaboradas por los laboratorios X y W. Obteniéndose la siguiente información básica: 3500 personas compran la vacuna del laboratorio X, 2100 compran la de W y 3000 personas compran ambas vacunas. Determinar:

i. ¿Cuántas personas no compran la vacuna de X?
ii. ¿Cuántas personas no compran la vacuna de W?
iii. ¿Cuántas personas compran exclusivamente la de X?
iv. ¿Cuántas personas compran únicamente la de W?
v. ¿Cuántas personas compran al menos una de estas vacunas?
vi. ¿Cuántas personas no compran ni del uno ni del otro?

Ejemplo 1.5: Ejemplo para la clase

En una encuesta realizada a 500 personas acerca del helado que consumen se comprobó: a 280 personas les gusta el helado DELFRÍO, a 120 personas les gusta el helado HELADINO, a 100 personas les gusta el helado ÁRTICO, 20 personas les gusta HELADINO Y del ÁRTICO, 50 personas les gusta DELFRÍO y del ÁRTICO, 25 personas les gusta DELFÍO y de HELADINO, por último a 10 personas les gusta de lastres marcas.
¿Cuántas personas no consumen ninguna de las tres marcas? ¿Cuántas personas consumen solo helados ÁRTICO?