Universidad Autónoma De Occidente

Matemática Aplicada

Victor Hugo Gil Avendaño

25/02/2019

ANÁLISIS MARGINAL

La derivada tiene varias aplicaciones en la administración y la economía en la construcción de lo que denominamos *tasas marginales*. En este campo, la palabra “marginal” se utiliza para indicar una derivada, esto es, una tasa de cambio. Se dará una selección de ejemplos.

Costo marginal

Suponga que el fabricante de cierto artículo descubre que con la finalidad de producir x de estos artículos a la semana, el costo total en dólares está dado por $C = 200 + 0.03x^2$. Por ejemplo, si se producen 100 artículos a la semana, el costo está dado por $C = 200 + 0.03(100)^2 = 500$. El costo promedio por artículo al producir 100 artículos es $\frac{500}{100} = \$5$.

Si el fabricante considera cambiar la tasa de producción de 100 a $(100 + \Delta x)$ unidades por semana, en donde Δx representa el incremento en la producción semanal. El costo es

$$\begin{aligned} C + \Delta C &= 200 + 0.03(100 + \Delta x)^2 \\ &= 200 + 0.03[10{,}000 + 200\Delta x + (\Delta x)^2] \\ &= 500 + 6\Delta x + 0.03(\Delta x)^2 \end{aligned}$$

Por consiguiente, el costo extra determinado por la producción de los artículos adicionales es

$$\begin{aligned} \Delta C = (C + \Delta C) - C &= 500 + 6\Delta x + 0.03(\Delta x)^2 - 500 \\ &= 6\Delta x + 0.03(\Delta x)^2 \end{aligned}$$

En consecuencia, el costo promedio por artículo de las unidades extra es

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = 6 + 0.03\Delta x$$

Por ejemplo, si la producción crece de 100 a 150 artículos por semana (de modo que $\Delta x = 50$), se sigue que el costo promedio de los 50 artículos adicionales es igual a $6 + 0.03(50) = \$7.50$ por cada uno. Si el incremento es de 100 a 110 (de modo que $\Delta x = 10$), el costo promedio extra de los 10 artículos es igual a \$6.30 por cada uno.

Definimos el costo marginal como el valor límite del costo promedio por artículo extra cuando este número de artículos extra tiende a cero. Así, podemos pensar del costo marginal como el costo promedio por artículo extra cuando se efectúa un cambio muy pequeño en la cantidad producida. En el ejemplo anterior,

$$\text{Costo marginal} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (6 + 0.03\Delta x) = 6$$

En el caso de una función de costo general $C(x)$ que represente el costo de producir una cantidad de x de cierto artículo, el costo marginal se define en forma similar por

$$\text{Costo marginal} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C(x + \Delta x) - C(x)}{\Delta x}$$

Es claro que el costo marginal no es otra cosa que la derivada de la función de costo con respecto a la cantidad producida.

$$\boxed{\text{Costo marginal} = \frac{dC}{dx}}$$

El costo marginal mide la tasa con que el costo se incrementa con respecto al incremento de la cantidad producida.

EJEMPLO 1 ***(Costo marginal)*** Para el caso de la función de costo

$$C(x) = 0.001x^3 - 0.3x^2 + 40x + 1000$$

determine el costo marginal como una función de x. Evalúe el costo marginal cuando la producción está dada por $x = 50$, $x = 100$ y $x = 150$.

En el ejemplo 1, observamos que el costo marginal decrece a medida que la producción se incrementa de 50 a 100 unidades y luego se incrementa de nuevo cuando la producción aumenta de 100 a 150. En la figura 8 aparece la gráfica de $C'(x)$ como una función de x.

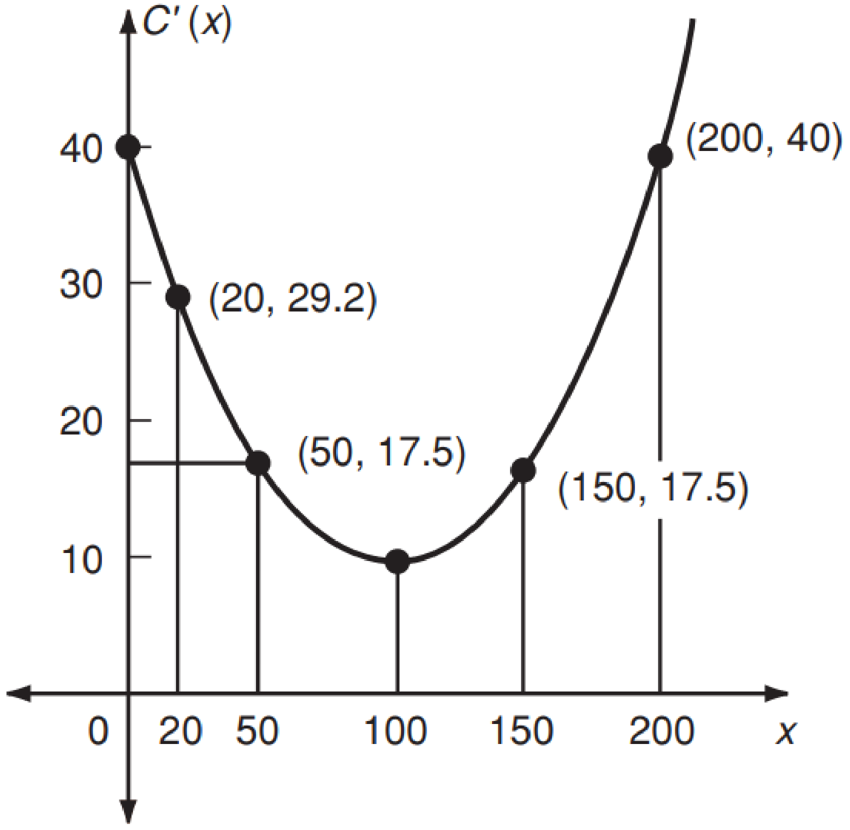

FIGURA 8

Este tipo de comportamiento es bastante frecuente en el costo marginal. Cuando la producción x aumenta a partir de valores pequeños, el costo marginal decrece (esto es, baja el costo promedio del pequeño incremento siguiente en la producción). La razón de esto estriba en las economías de escala, que provocan que la fabricación de pequeñas cantidades de bienes sea relativamente más cara que la producción de grandes cantidades. Sin embargo, cuando x se hace muy grande, los costos empiezan a aumentar a medida que la capacidad de las unidades de producción existentes llegan a gastarse, y empieza a ser necesario invertir en una nueva planta o maquinaria o pagar horas extra a los trabajadores, etc. Esto causa un eventual aumento en el costo marginal. Así que, por lo regular, el costo marginal primero decrece al aumentar la producción y luego se incrementa de nuevo.

Es importante no confundir el costo marginal con el costo promedio. Si $C(x)$ es la función de costo, el **costo promedio** de producir x artículos es el costo total, $C(x)$, dividido entre el número de artículos producidos.

$$\boxed{\text{Costo promedio por artículo} = \frac{C(x)}{x}}$$

Esto es muy diferente del costo marginal, que está dado por la derivada $C'(x)$. El costo marginal representa el costo promedio por unidad adicional de un pequeño incremento en la producción. El costo promedio por lo regular se denota por $\overline{C}(x)$.

EJEMPLO 2 En el caso de la función de costo $C(x) = 1000 + 10x + 0.1x^2$, el costo marginal es $C'(x) = 10 + 0.2x$. El costo promedio de producir x artículos es

Ingreso y utilidad marginales

Ahora consideramos los ingresos derivados de la venta de los productos o servicios de una empresa. Si $R(x)$ denota el ingreso en dólares por la venta de x artículos, definimos el **ingreso marginal** como la derivada $R'(x)$.

$$\boxed{\text{Ingreso marginal} = R'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta R}{\Delta x}}$$

Si el número de artículos vendidos se incrementa de x a $x + \Delta x$, entonces existe un incremento correspondiente en el ingreso dado por

$$\Delta R = \text{Nuevo ingreso} - \text{Ingreso original} = R(x + \Delta x) - R(x)$$

El incremento promedio en el ingreso por artículo adicional vendido se obtiene dividiendo ΔR entre el número de artículos adicionales, lo que da $\Delta R/\Delta x$. El valor límite de este promedio cuando $\Delta x \to 0$ da el ingreso marginal. Así pues, el ingreso marginal representa las entradas adicionales de una empresa por artículo adicional vendido cuando ocurre un incremento muy pequeño en el número de artículos vendidos. Esto es, la tasa con la que crece el ingreso con respecto al incremento del volumen de ventas.

EJEMPLO 3 ***(Ingreso marginal)*** Si la función de ingreso está dada por

$$R(x) = 10x - 0.01x^2$$

en donde x es el número de artículos vendidos, determine el ingreso marginal. Evalúe el ingreso marginal cuando $x = 200$.

La función de ingreso puede escribirse en la forma

$$R(x) = xp$$

en donde p es el precio por artículo y x es el número de artículos vendidos. Vimos en la sección 4.5 que en muchos casos existe una relación entre x y p caraterizada por la ecuación de demanda. Cuanto más artículos pueda vender la empresa, más bajo puede fijar el precio; cuanto más alto se fije el precio, en general, menor será el volumen de las ventas.

EJEMPLO 4 ***(Ingreso marginal)*** Determine el ingreso marginal cuando $x = 300$ si la ecuación de demanda es

$$x = 1000 - 100p$$

La utilidad que una empresa obtiene está dada por la diferencia entre sus ingresos y sus costos. Si la función de ingreso es $R(x)$ cuando se venden x artículos, y si la función de costo es $C(x)$ al producirse esos mismos x artículos, entonces la utilidad $P(x)$ obtenida por producir y vender x artículos está dada por

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

La derivada $P'(x)$ se denomina la **utilidad marginal**. Representa la utilidad adicional por artículo si la producción sufre un pequeño incremento. ☛ **20**

EJEMPLO 5 ***(Utilidad marginal)*** La ecuación de demanda de cierto artículo es

$$p + 0.1x = 80$$

y la función de costo es

$$C(x) = 5000 + 20x$$

Calcule la utilidad marginal cuando se producen y venden 150 unidades y también en el caso de que se produzcan y vendan 400 unidades.