UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE OCCIDENTE
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Curso: MATEMÁTICAS APLICADAS
Profesor: Victor Hugo Gil A. 28/01/2019

Teoría

LIMITES DE FUNCIONES

Sea $f(x)$ una función con dominio A. Sea $c \in \mathbb{R}$, c no necesariamente en A. Objetivo: indagar por los valores a los cuales se aproxima $f(x)$ cuando $x \in A$ se "aproxima" a c

Ej: $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$. ¿A que valor (si es que existe), se aproxima $f(x)$ cuando x se aproxima a 2?

x	1.5	1.7	1.9	1.99	2	2.01	2.1	2.2	2.5
$f(x)$	3.5	3.7	3.9	3.99		4.01	4.1	4.2	4.5

izq. $\longrightarrow$ $\longleftarrow$ der.

"Se observa" que cuando x tiende 2 por la izquierda y por la derecha, $f(x)$ se aproxima a 4. Lo diremos así: el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 2 es 4

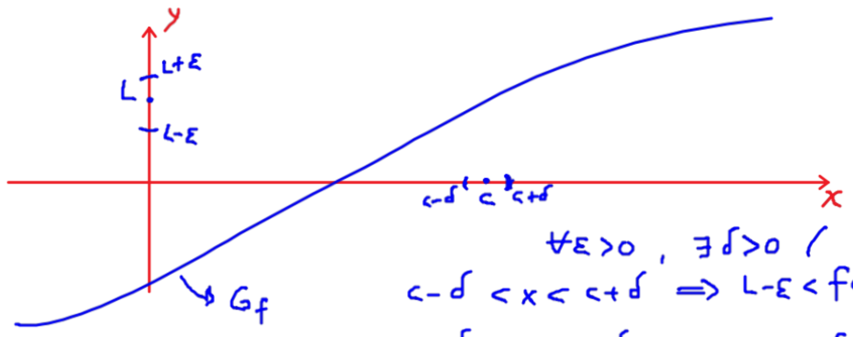
Lo escribiremos así:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 4$$

Definición formal de límite

$\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ equivale a decir que:

$\forall \varepsilon > 0 \,,\ \exists \delta > 0 \ / \ |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \qquad (\delta = \delta(\varepsilon))$



$\forall \varepsilon > 0 \,,\ \exists \delta > 0 \ /$

$c - \delta < x < c + \delta \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$

$-\delta < x - c < \delta \Rightarrow -\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon$

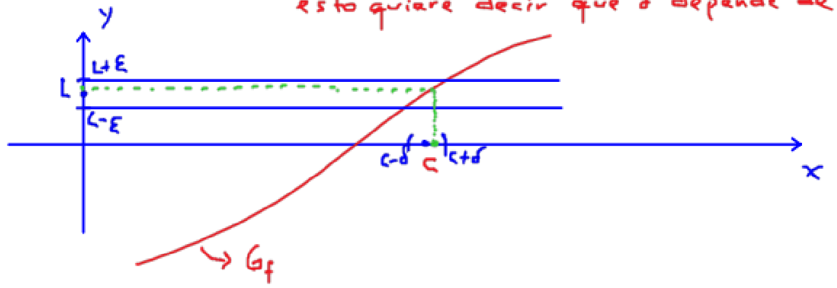
$|x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Ej: Pruebe que $\lim\limits_{x \to 3} (2x + 1) = 7$ usando la definición formal de límite.

LIMITES (CONTINUACIÓN)

Recuerde que $\lim_{x\to c} f(x) = L$ equivale a:

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0,\ \underbrace{\delta=\delta(\varepsilon)}_{\text{esto quiere decir que } \delta \text{ depende de } \varepsilon} \ /\ |x-c|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$



Ej: Pruebe que $\lim_{x\to 2} (2x+1) = 5$

s/ Debo demostrar que:

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0\ /\ |x-2|<\delta \Rightarrow |2x+1-5|<\varepsilon$$

Veamos:

$$|2x+1-5|<\varepsilon \Leftarrow |2x-4|<\varepsilon \Leftarrow |2.(x-2)|<\varepsilon$$
$$\Leftarrow |2|.|x-2|<\varepsilon \Leftarrow 2|x-2|<\varepsilon \Leftarrow |x-2|<\frac{\varepsilon}{2}$$

Tome $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$

$\varepsilon = 10^{-9}$ $\quad \delta = \frac{10^{-9}}{2}$ $\qquad 2-\frac{\varepsilon}{2} < x < 2+\frac{\varepsilon}{2}$

$|x-2| < \frac{10^{-9}}{2} \Rightarrow |2x+1-5| < 10^{-9}$ $\qquad 5-\varepsilon < 2x+1 < 5+\varepsilon$

Límite de una función

Problema introductorio:

- Dada la función $f(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$ es claro que $D_f = \mathbb{R} - \{3,-3\}$ pero surge una pregunta. ¿qué pasa con las imágenes de los elementos del dominio "cercanos" a $x=3$ y $x=-3$?

Como 3 y $-3 \notin D_f$ entonces $f(3)$ y $f(-3)$ no están definidas

✓ En el caso de $f(3)$ al sustituir obtenemos $\boxed{\frac{0}{0}}$ "forma indeterminada básica".

✓ En el caso de $f(-3)$ al sustituir obtenemos $\boxed{\frac{-6}{0}}$ "esta no es una forma indeterminada"

* Cálculo de límites de manera numérica.

estimación numérica de límites.

✓ Esta práctica nos debe llevar a una idea intuitiva del concepto de límite.

- Respondamos a la pregunta anterior

x	2,9	2,99	2,999	2,9999	2,99999	3	3,00001	3,0001	3.0001	3.001	3.01	3.1
$f(x)$	0,1694	0,16694	0,166694	0,1666694	0,16666694	X	0,16666663	0,1666663	0,166663	0,16663	0,1663	0,16

$$x \to 3^- \qquad f(x) \to 0,166\ldots$$

$$x \to 3^+ \qquad f(x) \to 0,166\ldots$$

- "paradojas Zenón" leer

$$f(x) = \frac{x-3}{x^2-9} \qquad f(3) = \nexists$$

✓ Mientras la x se aproxima con valores más grandes que tres a tres, sus imágenes se aproximan $0,1\hat{6}$

Límites laterales

- $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 0,1\hat{6}$ o $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 0,1\hat{6}$

* Los límites anteriores se llaman límites laterales y cuando estos son iguales se dice que el límite existe

Es decir, podemos concluir: * $\lim_{x\to 3} f(x) = 0,1\hat{6}$ ✓

x	-3.1	-3.01	-3.001	-3.0001	-3	-2.9999	-2.999	-2.99	-2.9
$f(x)$	-10	-100	-1000	-10000	X	10.000	1000	100	10

$$\lim_{x\to -3^-} f(x) = \nexists \qquad \lim_{x\to -3^+} f(x) = \nexists$$

La función cuando $x \to -3^-$ no tiene límite porque se hace "muy grande" pero negativo, en este caso se usa precisar y escribir

$$\lim_{x\to -3^-} f(x) = -\infty$$

Para mayor presición en este caso

$$\lim_{x\to -3^+} f(x) = +\infty.$$

Ej:

*

x	$-0,1$	$-0,01$	$-0,001$	$-0,0001$	0	$0,0001$	$0,001$	$0,01$	$0,1$
$f(x)$	$0,9983$	$0,99983$	$0,9999983$	$0,99999999$	X	$0,99999999$	$0,9999983$	$0,99983$	$0,9983$

Estime numéricamente $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$. Límite trigonométrico básico

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1. \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

por tanto $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1}$

* El uso tablas aunque es útil, podría llevarnos a errores

Ej: Estimemos el siguiente límite

$$\lim_{x\to 0} \underbrace{\operatorname{sen} \frac{\pi}{x}}_{f(x)}$$

✓ que $f(a)$ no exista, no implica que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ no exista

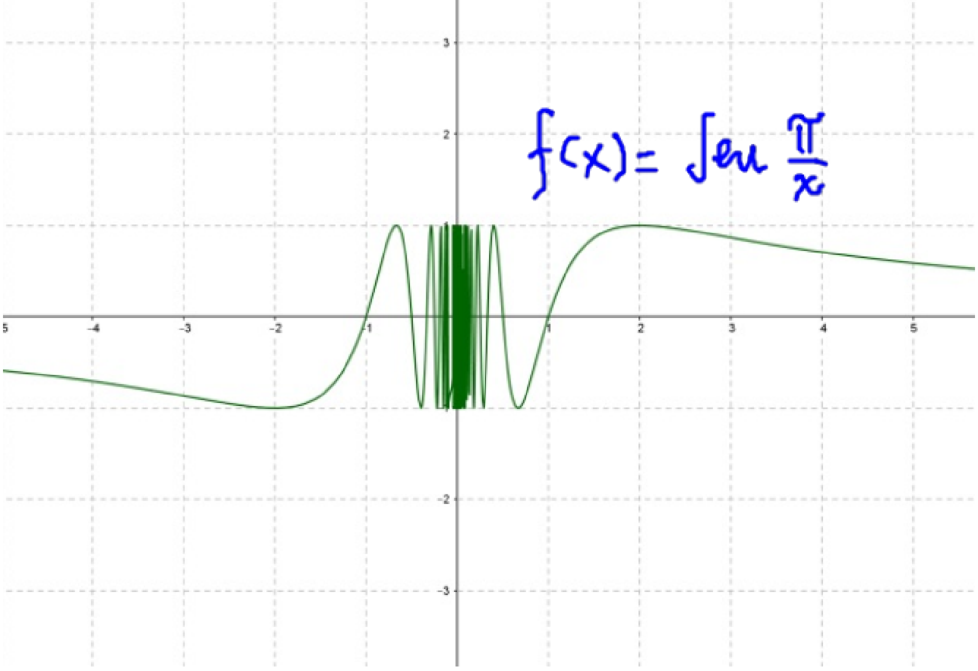
x	$-0,1$	$-0,01$	$-0,001$	$-0,0001$	0	$0,0001$	$0,001$	$0,01$	$0,1$
$f(x)$	0	0	0	0	X	0	0	0	0

Es natural, pero errado, concluir que ~~$\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} = 0$~~

* realice una tabla distinta a la anterior:

- Estimación gráfica de límites

Estimación gráfica de Límites

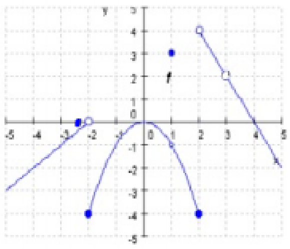


la gráfica nos muestra que la función oscila cuando x se aproxima a cero, en efecto.

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} = \nexists .$$

Estimación gráfica de límites

1. (16 ptos.) **Utilice la siguiente gráfica para contestar las preguntas en el espacio asignado:**



$\lim_{x\to 2^+} f(x)$ = 4

$\lim_{x\to -2^-} f(x)$ = 0

$\lim_{x\to -2^+} f(x)$ = -4

$f(-2)$ = -4

$f(1)$ = 3

$\lim_{x\to 0} f(x)$ = -1

∘ $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -4.$

observación

∘ Si el $\lim_{x\to a} f(x)$ existe pero $f(a)$ no existe o $f(a) \neq \lim_{x\to a} f(x)$ entonces en la gráfica hay un "hueco".

• $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 2 = \lim_{x\to 3^+} f(x)$

como los límites laterales son iguales $\lim_{x\to 3} f(x) = 2.$

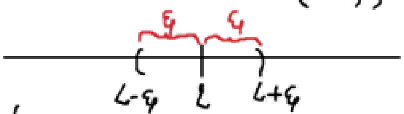
pero! observe que $f(3)$ no está definido

Ej: $\lim_{x\to -4^-} f(x) = -2$ $\quad \lim_{x\to -4^+} f(x) = -2$ $\quad f(-4) = -2$

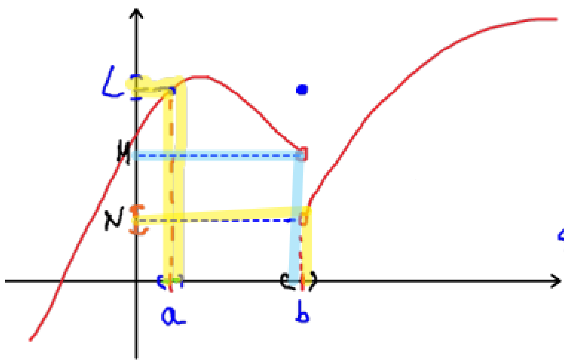
Definición formal de límite.

∘ Vecindad de L, donde $L\in\mathbb{R}$ (abierta) es un intervalo de radio épsilon ε. alrededor de L así: $(L-\varepsilon, L+\varepsilon) = V_\varepsilon(L)$

$\varepsilon>0$



* Vecindad restringida: * $V_\varepsilon^*(L) = V_\varepsilon(L) - \{L\}$



* $\lim_{x\to a} f(x) = L.$

Definición:

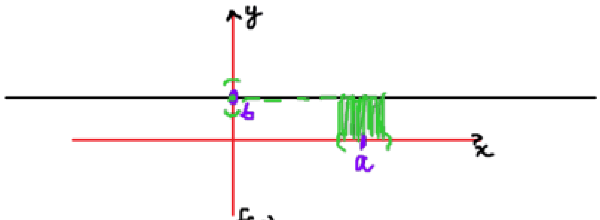
Si para toda vecindad de L existe una vecindad alrededor de a tal que: si $x \in V^*(a)$ entonces $f(x) \in V^*(L)$

$\lim_{x\to b^-} f(x)=M$; $\lim_{x\to b^+} f(x)=N$

* Lo anterior equivale a decir: si para $\varepsilon>0$, existe un $\delta>0$ tal que: si $0<\underbrace{|x-a|}_{\text{distancia entre } x \text{ y } a}<\delta$ entonces $|f(x)-L|<\varepsilon$.

* Algunos límites

Sea $f(x)=b$ la función constante



$\lim_{x\to a} \overbrace{b}^{f(x)} = b$

* Límite de una constante es la constante.

Ej: $\lim_{x\to 3} \overbrace{2}^{f(x)} = 2.$