GUIA 3

Métodos cualitativos en ecuaciones diferenciales

Es equivocado pensar que el objetivo principal del estudio de las ecuaciones diferenciales consiste en encontrar artificios del cálculo que permitan resolverlas. En el capítulo anterior presentamos una selección de técnicas que permiten resolver algunas ecuaciones diferenciales. Como en toda selección la lista no es completa. Existen tratados en donde se elaboran tablas de soluciones de manera análoga a las tablas de antiderivadas (ver [1] en las referencias bibliográficas al final de esta guía).

La pericia para resolver ecuaciones diferenciales va perdiendo poco a poco importancia con la llegada de los computadores y el diseño de software especializado para *computación simbólica.* La tendencia actual es dejar al computador este tipo de tareas de cálculo. Un programa como *Mathematica*[1] puede resolver mediante instrucciones sencillas casi todas las ecuaciones diferenciales tratadas en este curso. Si Mathematica despierta su curiosidad consulte las referencias [3], [4] y [5] al final de esta sección. Mathematica no es el único programa para estos menesteres. Maple V[2], por ejemplo, goza de aceptación en el medio universitario.

Sin quitarle importancia a este tipo de programas debe quedar claro que ni el más refinado de los software ni el más ingenioso de los matemáticos puede resolver en términos de funciones elementales todas las ecuaciones diferenciales, ni siquiera las más importantes de ellas. El problema más que de habilidad es de principio. En casos tan simples como

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{x} + t,$$

se desconocen soluciones clásicas (véase referencia bibliográfica [2]). La búsqueda de recetas para resolver todas las ecuaciones diferenciales en términos de funciones elementales es una búsqueda sin esperanzas. Ante este hecho se presentan algunas alternativas: los *métodos cualitativos*, los *métodos numéricos, y los métodos de aproximación.* No es parte de los objetivos de estas notas un estudio detallado al respecto. Se quiere sin embargo ilustrar estos métodos en algunos casos particulares.

1. Métodos Cualitativos

En muchos problemas, más que cálculos cuantitativos puntuales, lo que interesa es el comportamiento cualitativo de las soluciones en términos de las condiciones iniciales o de valores de los parámetros. Saber que una solución es creciente, que es cóncava o que tiene un límite en el infinito puede ser de ayuda en el entendimiento de un modelo. Ocurre, que bajo ciertas circunstancias, podemos obtener tal información sin resolver explícitamente la ecuación diferencial.

[1]Mathematica es una marca registrada de Wolfram Research Inc.

[2]Maple V es una marca registrada de Waterloo Maple Inc.

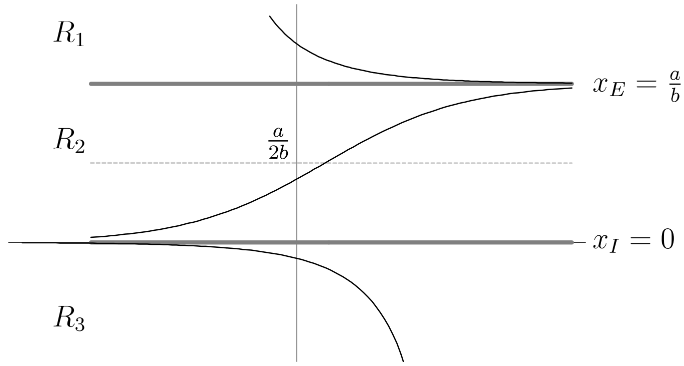

Figura 1: Soluciones de la ecuación (1)

1.1. El modelo de Verhulst

Resumiremos los principales resultados concernientes al *modelo de Verhulst* para la dinámica de poblaciones

$$\frac{dx}{dt} = x\,(a - b\,x), \tag{1}$$

tratado en la Guía de aplicaciones. Sabemos que la ecuación (1) satisface las hipótesis del teorema Fundamental, que las funciones constantes $x_E(t) = \frac{a}{b}$ y $x_I(t) = 0$ son soluciones (*soluciones de equilibrio*) de (1) y que los gráficos de x_E y x_I (ver figura 1) son rectas horizontales que dividen el plano tx en tres regiones

$$R_1 = \left\{(t,x) \mid \frac{a}{b} < x\right\}, \quad R_2 = \left\{(t,x) \mid 0 < x < \frac{a}{b}\right\}, \quad R_3 = \{(t,x) \mid x < 0\},$$

tales que el gráfico de cualquier solución no constante $x = x(t)$ de (1) permanece confinado en una y sólo una de estas regiones. Más aún, pudimos determinar cuándo es creciente, y cuándo es decreciente la solución $x = x(t)$ de (1) a partir de la condición inicial $x(t_0) = x_0$.

El objetivo principal de esta sección es obtener información adicional relevante de las soluciones $x = x(t)$ de (1) sin conocerlas explícitamente. Podemos por ejemplo determinar la concavidad de las soluciones. Derivando (1) con respecto a t obtenemos

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(a\,x\,(t) - b\,x^2\,(t)\right) = (a - 2b\,x\,(t))\,\frac{dx}{dt}. \tag{2}$$

Recuerde que la solución estará confinada a la región a la pertenece la condición inicial (t_0, x_0). Tal como hicimos en la Guía de aplicaciones estudiaremos los siguientes casos

- Si $\frac{a}{b} < x_0$, sabemos que el gráfico de la solución $x = x(t)$, $t \in I$ está contenido en R_1 y que la solución $x = x(t)$ es estrictamente decreciente. Esto significa que $\frac{a}{b} < x(t)$, y por lo tanto $a - 2b\,x\,(t) > 0$. Por eso al reemplazar en (2) tenemos $\frac{d^2x}{dt^2} > 0$. Por lo tanto la función $x = x(t)$ es cóncava hacia arriba.

- Si $0 < x_0 < \frac{a}{b}$, vimos en la Guía de aplicaciones que $0 < x(t) < \frac{a}{b}$ y $\frac{dx}{dt} > 0$. Teniendo en cuenta (2) se puede ver que la solución $x = x(t)$, $t \in I$, es cóncava hacia abajo siempre que $\frac{a}{2b} < x(t) < \frac{a}{b}$, y cóncava hacia arriba si se cumple que $0 < x(t) < \frac{a}{2b}$.

- Análogamente, si $x_0 < 0$, se demuestra que la solución $x = x(t)$, $t \in I$, es estrictamente decreciente y cóncava hacia abajo.

La figura 1 resume el análisis de crecimiento y concavidad de las soluciones de (1). Tal como se señaló en la Guía de aplicaciones, el intervalo de definición I de $x = x(t)$ depende de x_0 y de t_0. Por ejemplo, si $t_0 = 0$ y $x_0 > \frac{a}{b}$, entonces $I = \left(\frac{1}{a} \ln \frac{b\,x_0 - a}{b\,x_0}, \infty\right)$, mientras que $I = (-\infty, \infty)$ si $0 \leq x_0 \leq \frac{a}{b}$. Recuerde que mediante cálculo directo se obtiene $\lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{a}{b}$ siempre que $x_0 > 0$.

1.2. Ecuaciones diferenciales autónomas

La técnica empleada en el modelo de Verhulst puede extenderse a una clase relativamente amplia de ecuaciones diferenciales.

Definición 1. *Diremos que una ecuación diferencial de primer orden es autónoma si se puede expresar en la forma*

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \tag{3}$$

donde $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es una función de valor real definida en un intervalo abierto Ω.

Por ejemplo, la ecuación de Verhulst (1) es autónoma, mientras la ecuación diferencial $\frac{dx}{dt} = (\operatorname{sen} t)\,x$ no lo es. Nótese que para una ecuación autónoma las condiciones del teorema Fundamental de existencia y unicidad de soluciones se reducen a exigir que la función f tenga derivada contínua en Ω, de modo que en adelante supondremos válido el siguiente

Supuesto. *Suponderemos que f en (3) tiene derivada continua en el intervalo abierto Ω.*

Soluciones maximales. Dados $t_0 \in \mathbb{R}$ y $x_0 \in \Omega$ se garantiza la existencia de una única solución de (3), definida sobre cierto intervalo $I \subset \mathbb{R}$, que satisface la condición inicial $x(t_0) = x_0$. Más aún, supondremos que I es maximal, en el sentido de que es el mayor intervalo donde la solución del problema de valor inicial está definida. Por ejemplo, el intervalo maximal de definición del problema de valor inicial, $\frac{dx}{dt} = x^2$, $x(1) = -1$, es $(0, \infty)$, aunque la solución $x(t) = -1/t$ tambien está definida en cualquier subintervalo de $(0, \infty)$.

Definición 2. *Las soluciones constantes $x(t) = c$, $t \in \mathbb{R}$, de (3) se llaman soluciones de equilibrio o simplemente equilibrios.*

Interpretando una ecuación diferencial como la descripción de un sistema dinámico, los equilibrios son aquellos estados en los que el sistema no cambia con el tiempo. Supongamos que $x(t) = c$ es un equilibrio de (3). Reemplazando en (3) tenemos que para todo número real t

$$x'(t) = 0 = f(x(t)) = f(c).$$

De acuerdo con esto, las soluciones de equilibrio c se determinan resolviendo $f(c) = 0$. Por ejemplo, en el modelo de Verhulst (1) las soluciones de equilibrio se obtienen resolviendo $x\,(a - b\,x) = 0$, de donde resultan $x_E(t) = \frac{a}{b}$ y $x_I(t) = 0$.

Teorema 1. *Cualquier solución de* (3) *es o bien una solución de equilibrio o una función estrictamente monótona.*

Demostración. Sea $x(t)$, $t \in I$, una solución (maximal) de (3). Demostraremos que si x tiene un punto crítico (punto donde se anula la derivada), entonces $x(t)$ es constante. Para ello, supongamos que $x'(t_e) = 0$ con $t_e \in I$ y sea $x_e = x(t_e)$. Puesto que $x(t)$ es solución se tiene:

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t)), \quad t \in I.$$

En particular para $t = t_e$, se tiene que $x'(t_e) = f(x(t_e)) = 0$. En consecuencia, la función constante $y(t) = x_e$, $t \in \mathbb{R}$, es una solución de equilibrio de (3). Tenemos que tanto x como la solución constante y son soluciones de (3) que satisfacen la misma condición inicial en $t = t_e$. Se sigue entonces del Teorema Fundamental que $x(t) = y(t) = x_e$. $\square$

El teorema anterior no es válido para ecuaciones diferenciales no autónomas. Para muestra obsérvese que la función $x(t) = e^{1-\cos t}$, $t \in \mathbb{R}$, es solución de $\frac{dx}{dt} = (\operatorname{sen} t)\, x$. Sin embargo, $x = x(t)$ no es creciente ni decreciente ni constante. Como ejercicio se propone esbozar el gráfico de $x(t) = e^{1-\cos t}$.

Determinar el intervalo de definición de una solución (maximal) de una ecuación diferencial autónoma es un problema no trivial. El siguiente resultado es de gran ayuda en ese respecto.

Teorema 2. *Sean* $\Omega = (\alpha, \beta)$, $x_0 \in \Omega$ *y* $t_0 \in \mathbb{R}$. *Si* $x = x(t)$, $t \in (a, b)$ *es la solución maximal de* (3) *que satisface* $x(t_0) = x_0$, *entonces los límites*

$$\lim_{t \to a^+} x(t) \quad y \quad \lim_{t \to b^-} x(t)$$

existen (sin perjuicio de que puedan ser infinitos). Más aún, si los límites anteriores se denotan por A *y* B *respectivamente, entonces* A *debe tomar uno de los valores* α *o* β *si* $a \neq -\infty$. *Análogamente* B *debe tomar uno de los valores* α *o* β *si* $b \neq \infty$.

Demostración. Los límites existen pues el Teorema 1 garantiza que x es una función mónotona. La figura 2 ilustra el caso en que x es estrictamente creciente. Suponga que $b \neq \infty$ y que $\alpha < B < \beta$. El Teorema Fundamental de existencia y unicidad establece la existencia de una solución $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ que satisface $\tilde{x}(b) = B$, definida en un intervalo abierto que contiene a b. En particular, $\tilde{x}$ está definida en un intervalo de la forma $(b, b + \epsilon)$ para algún $\epsilon > 0$. En ese caso podría construirse una solución $y = y(t)$ de la ecuación, que estaría definida en $(a, b + \epsilon)$, de acuerdo con la siguiente fórmula:

$$y(t) = \begin{cases} x(t) & \text{si } a < t < b, \\ B, & \text{si } t = b, \\ \tilde{x}(t) & \text{si } b < t < b + \epsilon. \end{cases}$$

En efecto, como y coincide con x en (a, b) y con $\tilde{x}$ en $(b, b + \epsilon)$, se tiene que $y = y(t)$ es solución en dichos intervalos. De otro lado, y es derivable en $t = b$ y $y'(b) = f(y(b))$ puesto que

$$\lim_{t \to b^-} y'(t) = \lim_{t \to b^-} f(x(t)) = f(B) = \lim_{t \to b^+} f(\tilde{x}(t)) = \lim_{t \to b^+} y'(t).$$