UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE OCCIDENTE
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Curso: CÁLCULO II (C.E)
Profesor: Victor Hugo Gil A. 29/01/2019

Teoría

Antiderivada

Dada una función diferenciable F tal que $F' = f$, diremos que F es una antiderivada de f.

Ej: $F(x) = x^3$ es una antiderivada de $f(x) = 3x^2$ pues $F'(x) = f(x)$

Teorema Si F es una antiderivada de f y C es una constante, entonces $F+C$ también es una antiderivada de f. La llamaremos la antiderivada más general de f.
Más aún, si G es otra antiderivada de f, entonces $F - G = K$, donde K es una constante

D/. $(F+C)' = F' + C' = f + 0 = f$. Esto quiere decir que $F+C$ es una antiderivada de f
Si G es otra antiderivada de f, entonces $G' = f$
Puesto que $F' = f$, entonces:

$$G' - F' = f - f = 0.$$ En otras palabras:

$G' - F' = (G-F)' = 0 \Rightarrow G - F = K$ (Por una consecuencia del T.V.M)

NOTACION

Si $F+C$ es la antiderivada más general de f escribiremos lo siguiente:

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C$$

NOTE QUE:

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right) = \left(F(x)+C\right)' = f(x)$$

$$\int f'(x)\,dx = f(x)+C$$

Ej: F ó V:

$$\int \sec x\,dx = \tan x + C$$

Falso!! pues $(\tan x + C)' \neq \sec x$

Crecimiento de poblaciones

Sea $P(t)$ una población en el tiempo t.
Esta población cambia proporcionalmente a su tamaño

Simbólicamente:

$$\frac{dP}{dt} = K\,P(t) \iff P'(t) = K \cdot P(t) \iff \frac{P'(t)}{P(t)} = K$$

Observa que $\quad \frac{d}{dt}\left(\ln P(t)\right) = \frac{1}{P(t)} \cdot P'(t) = \frac{P'(t)}{P(t)}$

De acuerdo con lo anterior, la función $g(t) = \ln P(t)$ es tal que: $\quad g'(t) = K$. Entonces

$$g(t) = \int K\,dt = Kt + C \quad ; \; C \text{ es const.}$$

Tenemos entonces: $\quad \ln P(t) = Kt + C \iff$

$$P(t) = e^{Kt+C} = \underbrace{e^{C}}_{\text{const.}} \cdot e^{Kt} = c_1 e^{Kt}$$

$P(0) = c_1 e^{K(0)} = c_1$. Si llamamos $P(0)$ población inicial y la denotamos por P_0, tendríamos que la población está dada por la función

$$P(t) = P_0 e^{Kt}$$

Cálculo de antiderivadas

Calcula:

① $\int 3y^3 dt$ ② $\int ax\, dx$ ③ $\int (2+x^3)\, dx$

④ $\int \frac{1}{x} dx$ ⑤ $\int \frac{3x^2+x}{x} dx$ ⑥ $\int \sqrt{y}\, dy$

⑦ $\int \sec^2 t\, dt$ ⑧ $\int (2x^2+1)^2 dx$ ⑨ $\int x(x^2+1)^{10} dx$

s/. ① $\int 3y^3 dt = 3y^3 t + C$ ② $\int ax\,dx = \frac{a}{2}x^2 + C$

③ $\int (2+x^3)dx = \int 2dx + \int x^3 dx = 2x + \frac{x^4}{4} + C$

④ $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$ ⑤ $\int \frac{3x^2+x}{x}dx = \int (3x+1)\,dx =$

$= 3\int x\,dx + \int 1\,dx = 3.\frac{x^2}{2} + x + C = \frac{3}{2}x^2 + x + C$

⑥ $\int \sqrt{y}\,dy = \int y^{\frac{1}{2}}dy = \frac{y^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3}y^{3/2} + C$

⑦ $\int \sec^2 t\, dt = \tan t + C$ ⑧ $\int (2x^2+1)^2 dx = \int (4x^4+4x^2+1)dx$

$= \frac{4}{5}x^5 + \frac{4}{3}x^3 + x + C$

$u = f(x)$
$du = f'(x).dx$

⑨ $\int x(x^2+1)^{10}dx$ Sea $u = x^2+1$
$du = 2x.dx \Rightarrow \frac{du}{2} = x\,dx$

$\int x(x^2+1)^{10}dx = \int u^{10}.\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int u^{10}du = \frac{1}{2}\frac{u^{11}}{11} + C$

$= \frac{u^{11}}{22} + C = \frac{(x^2+1)^{11}}{22} + C$

Antiderivadas

Dada una función f, se dice que otra función F es una antiderivada de f si $F'(x) = f(x)$

Ej: $t(x) = \frac{3}{4}x^4 + \frac{5x^2}{2} + x$ es una antiderivada de $r(x) = 3x^3 + 5x + 1$ pues $t'(x) = r(x)$

En términos generales si $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$, escribiremos $\int f(x)\,dx = F(x) + C$

constante

De acuerdo con esta notación:

$$\int (3x^3 + 5x + 1)\,dx = \frac{3}{4}x^4 + \frac{5}{2}x^2 + x + C$$

Ej: $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$ pues $(\operatorname{sen} x + c)' = \cos x$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$\int \ln x\,dx \neq \frac{1}{x} + C$ pues $\left(\frac{1}{x} + c\right)' \neq \ln x$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

Algunas antiderivadas conocidas:

$\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + C$

$\int \sec x \cdot \tan x \, dx = \sec x + C$

$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$

$\int \csc x \cdot \cot x \, dx = -\csc x + C$

$\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$

$\int e^x dx = e^x + C$

$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

Ej: ¿ $\int x e^x dx = x e^x - e^x + C$?

Veamos:

$(x.e^x - e^x + C)' = \cancel{1 e^x} + x e^x - \cancel{e^x} + 0 =$

$x e^x$

Ej: ¿ $\int (xy) \, dy = \frac{1}{2} x y^2 + C$?

R/. Sí pues ...

Antiderivadas (Continuación)

Ej.: Movimiento Rectilíneo unif. acel. (MUA)

$a(t) = a$ (a es constante)

$V(t) = \int a(t)\,dt = \int a \cdot dt = at + K$

$V(t) = at + K$.

Se acostumbra escribir $V(0) = V_0$

$V(0) = a(0) + K = K \Rightarrow K = V_0$

$\Rightarrow \boxed{V(t) = V_0 + at}$

$a(t)$: aceleración en función del tiempo.

$v(t)$: velocidad en función del tiempo

$x(t)$: posición en función del tiempo

$x(t) = \int V(t)\,dt = \int (V_0 + at)\,dt = V_0 t + \frac{1}{2} a t^2 + C$

Se acostumbra escribir $X(0) = X_0$

$X(0) = V_0(0) + \frac{1}{2} a (0)^2 + C \Rightarrow C = X(0) \Rightarrow C = X_0$

$\Rightarrow \boxed{X(t) = X_0 + V_0 t + \frac{1}{2} a t^2}$

Teorema Sean f y g funciones cuyas antiderivadas existen:

1. $\int k\,dt = kt + C$
2. $\int k \cdot f(w)\,dw = k \cdot \int f(w)\,dw$
3. $\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$
4. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, si $n \neq -1$
5. $\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

Ej: Calcule: ① $\int (2+x^2)\,dx$

② $\int \sqrt{x}\,dx$ ③ $\int \frac{x+1}{x^2}\,dx$ ④ $\int \operatorname{sen} t \cos t\,dt$

S/ ① $\int (2+x^2)\,dx = \int 2\,dx + \int x^2\,dx = 2x + \frac{1}{3}x^3 + C$

② $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$

③ $\int \frac{x+1}{x^2}\,dx = \int (x+1) \cdot x^{-2}\,dx = \int (x^{-1} + x^{-2})\,dx =$

$\ln|x| + \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = \ln|x| - \frac{1}{x} + C$

4) $\int \operatorname{sen} t . \cos t \, dt = \int \frac{2 \operatorname{sen} t \cos t}{2} \, dt =$

$= \frac{1}{2} \int 2 \operatorname{sen} t \cos t \, dt = \quad \left[\operatorname{sen}(2t) \overset{\text{ojo:}}{=} 2 \operatorname{sen} t \cos t \right]$

$= \frac{1}{2} \cdot \int \operatorname{sen}(2t) \, dt = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{-\cos(2t)}{2} \right] + C =$

$= -\frac{1}{4} \cos(2t) + C$

—o—.

Otra forma de resolver $\int \operatorname{sen} t \cos t \, dt$:

$\int \operatorname{sen} t . \cos t \, dt =$

$= \frac{\operatorname{sen}^2 t}{2} + C$. Prueba:

$\left(\frac{1}{2} . \operatorname{sen}^2 t + C \right)' = \frac{1}{\cancel{2}} . \cancel{2} \operatorname{sen} t . \cos t = \operatorname{sen} t \cos t$

$\frac{1}{2} \operatorname{sen}^2(t) \quad -\frac{1}{4} \cos(2t)$

$-\frac{1}{4} \cos 2t = -\frac{1}{4} \left(\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t \right)$

$= -\frac{1}{4} \left(1 - \operatorname{sen}^2 t - \operatorname{sen}^2 t \right) =$

$= -\frac{1}{4} \left(1 - 2 \operatorname{sen}^2 t \right)$

$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 t$

Estudiar:

Método de sustitución