UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE OCCIDENTE
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Curso: Calculo II (131230)
Profesor: Victor Hugo Gil A. $febrero/2019$

Ejercicios # 3

Instrucciones. *Primero lea cuidadosa y detalladamente el taller, después, responda de manera clara y ordenada. Justifique todas las respuestas.*

1.(**Derivadas direccionales**) En los siguientes problemas determine la derivada direccional de f en el punto $\mathbf{p}$ en la dirección de $\mathbf{u}$.

a) $f(x,y)=x^2y$; $\mathbf{p}=(1,2)$; $\mathbf{u}=3i-4j$

b) $f(x,y)=y^2\ln(x)$; $\mathbf{p}=(1,4)$; $\mathbf{u}=i-j$

c) $f(x,y)=2x^2+xy-y^2$; $\mathbf{p}=(3,-2)$; $\mathbf{u}=i-j$

d) $f(x,y)=e^x\sin(y)$; $\mathbf{p}=(0,\pi/4)$; $\mathbf{u}=i+\sqrt{3}j$

e) $f(x,y)=e^{-xy}$; $\mathbf{p}=(1,-1)$; $\mathbf{u}=-i+\sqrt{3}j$

f) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$; $\mathbf{p}=(1,-1,2)$; $\mathbf{u}=\sqrt{2}i-j-k$

g) $f(x,y,z)=x^2+2y^2-3z^2$; $\mathbf{p}=(1,1,1)$; $\mathbf{u}=i+j+k$

h) $f(x,y,z)=\cos(xy)+e^{yz}+\ln(zx)$; $\mathbf{p}=(1,0,1/2)$; $\mathbf{u}=i+2j+2k$

2.(**Direcciones de incremento y decremento más rápido**) En los siguientes problemas determine un vector unitario en la dirección en que f crece o decrece más rápidamente en $\mathbf{p}$. ¿Cuál es la razón de cambio en esta dirección?

a) $f(x,y)=x^3-y^5$; $\mathbf{p}=(2,-1)$

b) $f(x,y)=e^x\sin(x)$; $\mathbf{p}=(5\pi/6,0)$

c) $f(x,y,z)=xe^{yz}$; $\mathbf{p}=(2,0,-4)$

d) $f(x,y,y)=x^2yz$; $\mathbf{p}=(1,-1,2)$

e) $f(x,y,z)=(x/y)-yz$; $\mathbf{p}=(4,1,1)$

f) $f(x,y,z)=xe^y+z^2$; $\mathbf{p}=(1,\ln(2),1/2)$

g) $f(x,y,z)=\ln(xy)+\ln(yz)+\ln(xz)$; $\mathbf{p}=(1,1,1)$

h) $f(x,y,z)=\ln(x^2+y^2-1)+y+6z$; $\mathbf{p}=(1,1,0)$

3.(**Un poco de teoría**)

a) ¿En qué dirección se anula la derivada de $f(x,y)=xy+y^2$ en $\mathbf{p}=(3,2)$?

b) ¿En qué direcciones se anula la derivada de $f(x,y)=(x^2-y^2)/(x^2+y^2)$ en $\mathbf{p}=(1,1)$?

c) Bosqueje la curva de nivel de $f(x,y)=y/x^2$ que pasa por $\mathbf{p}=(1,2)$. Calcule el vector gradiente $\nabla f(\mathbf{p})$ y trace ese vector, colocando su punto inicial en $\mathbf{p}$. ¿ Que debe ocurrir con $\nabla f(\mathbf{p})$?

d) ¿ existe una dirección $\mathbf{u}$ en que la razon de cambio de $f(x,y)=x^2-3xy+4y^2$ en $\mathbf{p}=(1,2)$ sea igual a 14? Justifique su respuesta.

3.1 Suponer que una montaña tiene forma de un paraboloide elíptico $z = c - ax^2 - by^2$, donde a, b y c son constantes positivas, x y y son las coordenadas este-oeste y norte-sur, y z es la altitud sobre el nivel del mar (x, y y z están medidas en metros). En el punto $(1, 1)$, ¿en qué dirección aumenta más rápido la altitud? Si se suelta una canica en $(1, 1)$, ¿en qué dirección comenzaró a rodar?

4.(**Aplicaciones**)

4.1. El capitán Ralph tiene dificultades cerca del lado soleado de Mercurio. La temperatura del casco de la nave, cuando él está en la posición (x, y, z), viene dada por $T(x, y, z) = e^{-x^2-2y^2-3z^2}$, donde x, y y z vienen dados en metros. Actualmente está en el punto $(1, 1, 1)$.

a) ¿En qué dirección deberá avanzar para disminuir más rápidamente la temperatura?

b) Si la nave viaja a $e^8 m/s$, ¿con qué rapidez decrecerá la temperatura si avanza en esa dirección?

4.2. Se ensaya a la tracción un monocristal de un metaloide de forma prismática rectangular con una base cuadrada de 2 cm de lado y una altura de 15 cm. Debido a la anisotropía (distinto comportamiento según las direcciones) del material, se ha observado que uno de los lados de la base se deforma dos veces más rápido que el otro. Si en un momento dado se determina que por efecto de la tracción la longitud de la pieza aumenta a una tasa de $1mm/s$, hallar la tasa de variación de ambos lados de la base.

4.3. Suponer que un pato está nadando en el círculo $x = \cos(t)$, $y = \sin(t)$ y que la temperatura del agua está dada por la fórmula $T = x^2e^y - xy^3$. Hallar dT/dt, la tasa de cambio en temperatura que puede sentir el pato.

4.4. La ecuación en derivadas parciales: $u_t + u_{xxx} + uu_x = 0$, llamada ecuación de Korteweg-de Vries o simplemente ecuación KdV, describe el movimiento de las ondas de agua en un canal poco profundo.

a) Demostrar que para cualquier constante positiva c la función $u(x, t) = 3c\sinh^2[\frac{1}{2}(x - ct)\sqrt{c}]$ es una solución de la ecuación anterior. Esta solución representa una joroba de agua que viaja en el canal y se llama solitón. Este fenómeno fue observado por primera vez por J. Scott Russell alrededor de 1840 en los canales cercanos a Edimburgo.

b) Determinar cómo depende la forma y rapidez del solitón respecto del parámetro c.

4.5. Un insecto se mueve sobre una superficie plana, cuya temperatura en cada punto viene dada por una función $T(x, y)$, medida en grados centígrados. El insecto lleva una trayectoria dada por las ecuaciones paramétricas $x(t) = \sqrt{1 + t}, y(t) = 2 + \frac{1}{3}t$, don de t es el tiempo medido en segundos. Se sabe que $T_x(2, 3) = 4, T_y(2, 3) = 3$. ¿A qué velocidad crece la temperatura en el camino del insecto a los 3 segundos?

5.(**Matriz Hessiana**) Determine el vector gradiente y la matriz Hessiana de las siguientes funciones en un punto genérico y, si es posible, en el punto P que se indica.

a) $f(x, y) = e^{xy}$; $\mathbf{p} = (1, 0)$.

b) $f(x, y) = x\ln(2y)$; $\mathbf{p} = (0, e/2)$.

c) $f(x, y) = \cos(xy) + sen(x^2y)$; $\mathbf{p} = (1, \pi/2)$

6.(**Matriz Hessiana y optimización**)

6.1. Halla y clasifica los puntos críticos de las siguientes funciones:

a) $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$.

b) $f(x, y) = xy^2 - x^2 - y^2$.

c) $f(x, y) = \cos(xy) + sen(x^2y)$.

6.2. Las siguientes preguntas son de múltiple elección pero con única respuesta.

1) La función $f(x, y) = x^3 - 3x^2 + 3y^2 - y^3$ tiene:

   a) Un punto critico en $(1, 1)$
   b) Un máximo en el punto critico en $(0, 2)$.
   c) Un punto de silla en el punto critico en $(2, 0)$.

2) La función $f(x, y) = -2x^2 - y^2$ tiene en $(0, 0)$:

   a) El único máximo local.
   b) Uno de sus infinitos máximos locales.
   c) Un punto de silla.

3) Sea $(1, 2)$ un punto critico de la función $f(x, y)$. Si la matriz Hessiana de dicha función es

$$\begin{pmatrix} 2x - y & y \\ y & 8 \end{pmatrix},$$

entonces el punto $(1, 2)$ es:

   a) Un máximo local.
   b) No hay información suficiente para caracterizarlo.
   c) Un punto de silla.

4) La función $f(x, y) = e^{2x}(y + x^3 - 3x)$ tiene :

   a) Un máximo en el punto $(1, 2)$.
   b) Un mínimo en el punto $(0, 0)$
   c) Ninguna de las anteriores.
   d) Un punto de silla en $(1, 2)$ y un Un mínimo en el punto $(0, 0)$.

7. A container with an open top is to have 10 m^3 capacity and be made of thin sheet metal. Calculate the dimensions of the box if it is to use the minimum possible amount of metal.

8. Let′s make some guttering from a strip of metal 12 in wide. We want to determine where to bend it and what angle to bend it at so as to maximise the cross - sectional area and hence the capacity of the guttering.

9. A package in the shape of a rectangular box can be mailed by the US Postal Service if the sum of its length and girth (the perimeter of a cross-section perpendicular to the length) is at most 108 in. Find the dimensions of the package with largest volume that can be mailed