1. TEOREMAS SOBRE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Teorema 1.1: Primer teorema de traslación

Si a es un número real cualquiera, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{at}\, f(t)\}(s) &= \mathcal{L}\{f(t)\}(s-a) \\ &= F(s-a) \end{aligned}$$

Ejemplo 1.1: Usos del primer teorema de traslación

a). $\mathcal{L}\{e^{2t}\ \sin t\}(s)$

Solución. $\mathcal{L}\{e^{2t}\ \sin t\}(s) = \mathcal{L}\{\sin t\}(s-2) = \dfrac{1}{(s-2)^2+1}$, ya que $\mathcal{L}\{\sin t\}(s) = \dfrac{1}{s^2+1}$

b) $\mathcal{L}\{e^{-4t}\, t^3\}(s)$

Solución. $\mathcal{L}\{e^{-4t}\, t^3\}(s) = \mathcal{L}\{t^3\}(s-(-4)) = \dfrac{3!}{(s+4)^4}$ ya que $\mathcal{L}\{t^3\}(s) = \dfrac{3!}{s^4}$

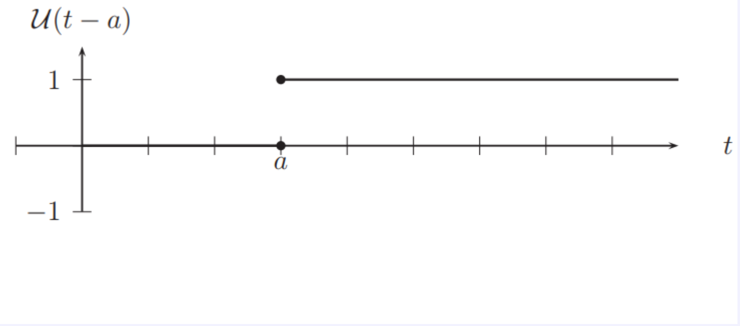
La función escalón de Heaviside, también llamada función escalón unitario o de causalidad a la derecha del cero, debe su nombre al matemático inglés Oliver Heaviside. Es una función discontinua cuyo valor es 0 para cualquier argumento negativo, y 1 para cualquier argumento positivo, incluido el cero.

Esta función tiene aplicaciones en ingeniería de control y procesamiento de señales, representando una señal que se enciende en un tiempo específico, y se queda encendida indefinidamente.

Por ejemplo, una fuerza externa que actúa sobre un sistema mecánico o una tensión eléctrica aplicada a un circuito, puede tener que suspenderse después de cierto tiempo. Para tratar de forma efectiva con estas funciones discontinuas conviene introducir una función especial llamada función escalón unitario

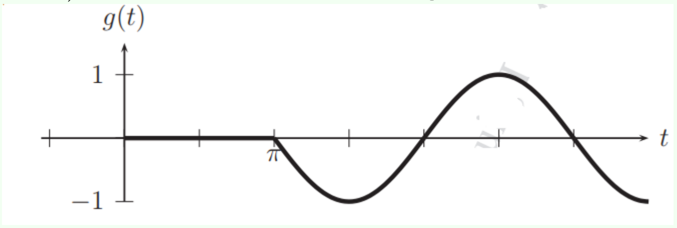
Definición 1.1: Función escalón unitario

$$\mathcal{U}(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < a \\ 1 & \text{si } t \geq a \end{cases}$$



Ejemplo 1.2:

Al aplicar $\mathcal{U}(t-\pi)$ a la función $\sin t$ trunca la función $\sin t$ entre 0 y π quedando la función $g(t) = \mathcal{U}(t-\pi)\sin t$ como lo muestra la gráfica



Teorema 1.2: Segundo teorema de traslación

Si $a > 0$ y $f(t)$ es continua para $t \geq 0$, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-a)\, f(t-a)\}(s) &= e^{-as}\, F(s) \\ &= e^{-as}\, \mathcal{L}\{f(t)\}(s) \end{aligned}$$

Ejemplo 1.3: Usos del segundo teorema de traslación

a). $\mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-a)\}(s)$

Solución. $\mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-a)\}(s) = \mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-a)\,1\}(s) = e^{-as}\,\dfrac{1}{s}$

b) $\mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-\frac{\pi}{2})\,\sin t\}(s)$

Solución. $\mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-\frac{\pi}{2})\,\sin t\}(s) = \mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-\frac{\pi}{2})\,\sin(t-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})\}(s)$,

pero $\sin(t-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}) = \sin(t-\frac{\pi}{2})\,\cos(\frac{\pi}{2}) + \sin(\frac{\pi}{2})\,\cos(t-\frac{\pi}{2}) = \cos(t-\frac{\pi}{2})$

$\mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-\frac{\pi}{2})\,\cos(t-\frac{\pi}{2})\}(s) = e^{-\frac{\pi}{2}s}\,\mathcal{L}\{\cos(t)\}(s) = e^{-\frac{\pi}{2}s}\,\dfrac{s}{s^2+1}$

Ejercicios 1.1: U

se el primer teorema de traslación para hallar la transformada de Laplace de las siguientes funciones *(si así lo requiere)*:

1. $f(t) = 3\sin 4t - 2$.
2. $f(t) = t^3 - 4t^2 + 5$.
3. $e^{-4t}(t^2+1)^2$.
4. $\sin at\,\cos bt$.
5. $\sin^2 at$.

Use el segundo teorema de traslación para hallar la transformada de Laplace de las siguientes funciones *(si así lo requiere)*:

6. $f(t) = t^2\mathcal{U}(t-3)$
7. $f(t) = \cos t\mathcal{U}(t-\pi)$