Ejemplo #1

En cierta ciudad, la razón a la que la población crece en cualquier tiempo es proporcional al tamaño de la población. Si la población era de 125,000 *habitantes en* 1970 *y de* 140,000 *en* 1990, *¿cuál es la población esperada en el año* 2010?

Ejemplo #2

Ingreso marginal y demanda Suponga que la función de ingreso marginal de un monopolista está dada por la ecuación diferencial

$$\frac{dr}{dq} = (50 - 4q)e^{-r/5}.$$

Encuentre la ecuación de demanda para el producto del monopolista.

Ejemplo #3

Circulación de dinero Un país tiene 900 millones de dólares de papel moneda en circulación. Cada semana, 45 millones se llevan a depositar a los bancos y la misma cantidad es pagada. El gobierno decide reimprimir papel moneda nuevo; siempre que el papel moneda viejo llega a los bancos, es destruido y reemplazado por nuevo. Sea y la cantidad de papel viejo (en millones de dólares) en circulación en el tiempo t (en semanas). Entonces y satisface la relación

$$\frac{dy}{dt} = -0.05y.$$

¿Qué tiempo se requerirá para que el 90% del papel moneda en circulación quede reemplazado por papel nuevo? Redondee su respuesta a la semana más cercana. [*Sugerencia:* si el 90% del papel es nuevo, entonces y es 10% de 900.]

En los problemas del 9 al 18 resuelva cada una de las ecuaciones diferenciales sujetas a las condiciones dadas.

9. $y' = \dfrac{1}{y}; \quad y > 0,\ y(2) = 2.$

10. $y' = e^{x-y}; \quad y(0) = 0.$ [*Sugerencia*: $e^{x-y} = e^x/e^y$.]

11. $e^y y' - x^2 = 0; \quad y = 0$ cuando $x = 0$.

12. $x^2 y' + \dfrac{1}{y^2} = 0; \quad y(1) = 2.$

13. $(4x^2 + 3)^2 y' - 4xy^2 = 0; \quad y(0) = \frac{3}{2}.$

14. $y' + x^2 y = 0; \quad y > 0,\ y = 1$ cuando $x = 0$.

15. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x\sqrt{1 + y^2}}{y}; \quad y > 0,\ y(1) = \sqrt{8}.$

16. $2y(x^3 + 2x + 1)\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2 + 2}{\sqrt{y^2 + 9}}; \quad y(0) = 0.$

17. $2\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xe^{-y}}{\sqrt{x^2 + 3}}; \quad y(1) = 0.$

18. $x(y^3 + 4)^{3/2}\, dx = 3e^{x^2} y^2\, dy; \quad y(0) = 0.$

35. Ecología En un bosque ocurre el depósito natural de basura, tal como hojas y ramas caídas, animales muertos, etc.[8] Sea $A(t)$ la cantidad de basura presente en el tiempo t, donde $A(t)$ se expresa en gramos por metro cuadrado y t está en años. Suponga que no hay basura en $t = 0$. Así, $A(0) = 0$. Suponga que

a. La basura cae al suelo continuamente a razón constante de 200 gramos por metro cuadrado cada año.

b. La basura acumulada se descompone continuamente a razón del 50% de la cantidad presente por año (que es $0.50A$).

La diferencia de las dos tasas es la razón de cambio de la cantidad presente de basura con respecto al tiempo:

$$\begin{pmatrix}\text{tasa de cambio de}\\ \text{la basura presente}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{tasa de caída}\\ \text{al suelo}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{tasa de}\\ \text{descomposición}\end{pmatrix}.$$