• **1.** Una partícula se mueve a lo largo del eje x de modo que su velocidad en cualquier tiempo $t \geqq 0$ está dada por $v = 1/(t^2 + 1)$. Asumiendo que inicialmente se encuentra en el origen, muestre que la partícula nunca pasará a $x = \pi/2$.

1) Datos del problema

Velocidad $\rightarrow$ $v(t) = \dfrac{1}{t^2+1}$; $t \geq 0$

Inicialmente se encuentra en el origen $\rightarrow$ $x(0) = 0$

Por demostrar: que la partícula nunca pasará a $x = \frac{\pi}{2}$

Solución // Note que $v(t) = \dfrac{dx}{dt}$

Por lo tanto debemos resolver el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{t^2+1} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow$ Esta ecuación diferencial se desarrolla (resuelve) mediante integración directa.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t^2+1} \rightarrow \int \frac{dx}{dt} \cdot dt = \int \frac{1}{t^2+1}\, dt$$

$$\rightarrow x(t) = \text{Arctan}(t) + c$$

usando la condición inicial $x(0) = 0$

$0 = x(0) = \text{Arctan}(0) + c \rightarrow 0 = 0 + c \rightarrow c = 0$

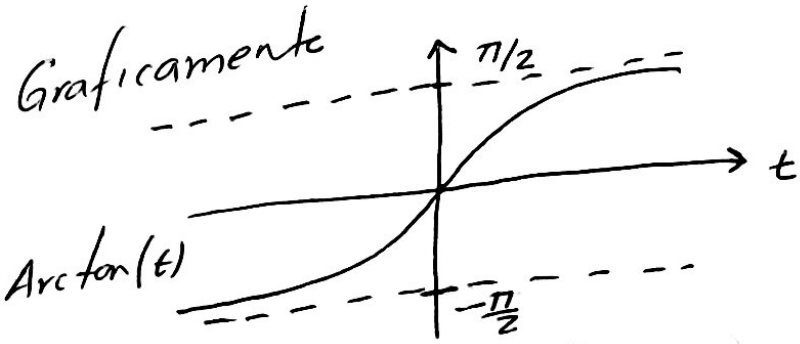
La solución al P.V.I es $x(t) = \text{Arctan}(t)$

Para demostrar que la partícula no pasará por $x(t) = \frac{\pi}{2}$ debemos mostrar que no existe $t \geq 0$ tal que $x(t) = \frac{\pi}{2}$

Es decir

$x(t) = \frac{\pi}{2} \rightarrow$ $\text{Arctan}(t) = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = \underbrace{\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{\text{No está definido en } \pi/2}$

Gráficamente



Es decir $\pi/2$ es una asíntota Horizontal por tanto la partícula NUNCA PASARÁ por $x = \frac{\pi}{2}$.

2. ¿Para qué valores de la constante m la función $y = e^{mx}$ será una solución a cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales? (a) $y' - 2y = 0$. (b) $y'' + 3y' - 4y = 0$. (c) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$.

2) dada la función $y = e^{mx}$; $m \in \mathbb{R}$
miremos para que valores de $m \in \mathbb{R}$ la función es solución de:

a) $y' - 2y = 0$
solución $y = e^{mx} \rightarrow y' = me^{mx}$, reemplazando en la ecuación diferencial se obtiene $me^{mx} - 2(e^{mx}) = 0$
$\rightarrow e^{mx}[m-2] = 0 \rightarrow m - 2 = 0$ pues e^{mx} nunca es igual a 0.
Luego $m - 2 = 0 \rightarrow \boxed{m=2}$; es decir el unico valor de m para que $y = e^{mx}$ sea solución de $y' - 2y = 0$ es $m = 2$. Reescribiendo. La solución es $\boxed{y = e^{2x}}$

b) $y'' + 3y' - 4y = 0$
$y = e^{mx} \rightarrow y' = me^{mx} \rightarrow y'' = m^2 e^{mx}$, reemplazando en la ecuación $(m^2 e^{mx}) + 3(me^{mx}) - 4(e^{mx}) = 0$
$\rightarrow e^{mx}[m^2 + 3m - 4] = 0 \rightarrow m^2 + 3m - 4 = 0 \rightarrow (m+4)(m-1) = 0$
$\rightarrow \boxed{m=-4}$ y $\boxed{m-1}$ por tanto las soluciones serian
$\boxed{y_1 = e^{-4x}}$ y $\boxed{y_2 = e^{-x}}$

c) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$
$y = e^{mx} \rightarrow y' = me^{mx} \rightarrow y'' = m^2 e^{mx} \rightarrow y''' = m^3 e^{mx}$ Reemplazando
$(m^3 e^{mx}) - 6(m^2 e^{mx}) + 11(me^{mx}) - 6(e^{mx}) = 0$
$\rightarrow e^{mx}[m^3 - 6m^2 + 11m - 6] = 0 \rightarrow m^3 - 6m^2 + 11m - 6 = 0$
$\rightarrow (m-3)(m-2)(m-1) = 0 \rightarrow \boxed{m=3}, \boxed{m=2}, \boxed{m=1}$
luego las soluciones son: $\boxed{y_1 = e^{3x}}$
$\boxed{y_2 = e^{2x}}$
$\boxed{y_3 = e^{x}}$

6. Muestre que una solución de $y' = 1 + 2xy$ sujeto a $y(1) = 0$ es $y = e^{x^2} \int_1^x e^{-t^2}\, dt$.

7. Es $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 34 = 0$ una solución a la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3 - x}{y + 5}$?

6) mostremos que $y = e^{x^2} \cdot \int_1^x e^{-t^2} dt$ es una Solución al problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = 1 + 2xy \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

solución// debemos derivar $y = e^{x^2} \cdot \int_1^x e^{-t^2} dt$

$$\frac{d(y)}{dx} = \frac{d}{dx}\left[e^{x^2} \cdot \int_1^x e^{-t^2} dt\right]$$

$$y' = \frac{d}{dx}[e^{x^2}] \cdot \int_1^x e^{-t^2} dt + e^{x^2} \cdot \frac{d}{dx}\left[\int_1^x e^{-t^2} dt\right]$$

derivada del producto

$$y' = 2xe^{x^2} \cdot \int_1^x e^{-t^2} dt + e^{x^2} \cdot e^{-x^2}$$

teorema fundamental del calculo

$$\rightarrow y' = 2xe^{x^2} \int_1^x e^{-t^2} dt + 1$$

$$\rightarrow y' = 1 + 2x\left(e^{x^2} \int_1^x e^{-t^2} dt\right)$$

$$\rightarrow \boxed{y' = 1 + 2xy}$$

Es una solución.

ahora debemos que $y(1) = 0$

$$y(x) = e^{x^2} \cdot \int_1^x e^{-t^2} dt$$

$$\rightarrow y(1) = e^{1^2} \cdot \underbrace{\int_1^1 e^{-t^2} dt}_{0}$$

$$y(1) = e \cdot 0 = 0$$

Por tanto $y = e^{x^2} \int_1^x e^{-t^2} dt$ Es una Solución al P.V.I

7) Es $x^2+y^2-6x+10y+34=0$ una solución de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{3-x}{y+5}$?

Solución // derivemos implícitamente respecto a x la expresión $x^2+y^2-6x+10y+34=0$

$$\frac{d}{dx}[x^2+y^2-6x+10y+34] = \frac{d}{dx}(0)$$

$$2x+2y\cdot\frac{dy}{dx}-6+10\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}[2y+10] = -2x+6$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x+6}{2y+10}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2[3-x]}{2[y+5]}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3-x}{y+5}$$

Por tanto $x^2+y^2-6x+10y+34=0$ es una solucion a la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{3-x}{y+5}$ para funciones apropiadas.