DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Universidad Autónoma de Occidente

Cálculo II (131227 - GR 7)

Ecuaciones en diferencias

CALIFICACIÓN

21 de mayo de 2019

Instrucciones. *Primero lea cuidadosa y detalladamente el taller, después, responda de manera clara y ordenada. Justifique todas las respuestas.*

1. Muestre que $y_x = \dfrac{c}{1+cx}$ es una solución de $y_{x+1} = \dfrac{y_x}{1+y_x}$ y encuentre una solución particular si $y_0 = -4$.

2. Muestre que $y_x = c_1 + c_2 2^x$ es una solución de $y_{x+2} - 3y_{x+1} + 2y_x = 0$ y encuentre una solución particular si $y_0 = 1$.y $y_1 = 2$.

3. Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones en diferencias:

a) $y_{x+1} + y_x - 2 = 0$

b) $2y_{x+1} + y_x - 3 = 0$

Teorema 0.1: Comportamiento de la sucesión de soluciones

La ecuación en diferencias lineal de primer orden

$$y_{x+1} = Ay_x + B, \quad x = 0, 1, 2, ...$$

tiene la solución

$$\begin{cases} y_x = A^x(y_0 - y^*) + y^* & \text{si } A \neq 1, \quad x = 0, 1, 2, ... \\ y_x = y_0 + Bx & \text{si } A = 1, \quad x = 0, 1, 2, ... \end{cases} \tag{1}$$

donde $y^* = \dfrac{B}{1-A}$. Si $-1 < A < 1$, la sucesión solución converge a y^*; de lo contrario diverge, a no ser que $y_x = y_0$.

4. Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones en diferencias, determine de manera gráfica el comportamiento de la sucesión de soluciones y calcule los primeros valores de la sucesión de soluciones.

a) $3y_{x+1} - 2y_x - 3 = 0, \quad y_0 = 5$

b) $8y_{x+1} + 4y_x - 3 = 0, \quad y_0 = \frac{1}{2}$

c) $y_{x+1} = 3y_x - 1, \quad y_0 = \frac{1}{2}$

c) $y_{x+1} + 4y_x + 12 = 0, \quad y_0 = 6$

Nombre del estudiante:

Teorema 0.2: Modelo de la telaraña

En un mercado tenemos las funciones de oferta y demanda,

$$\begin{cases} Q^s_{t+1} & = S(P_t) \\ Q^d_t & = D(P_t) \end{cases} \tag{2}$$

La oferta en el periodo $t+1$ depende del precio en el periodo t; es decir, la oferta de hoy depende del precio del periodo inmediatamente anterior. En cambio la demanda de hoy depende del precio de hoy.
Supongamos que las funciones de demanda y oferta son lineales.

$$\begin{cases} Q^s_{t+1} & = -c + dP_t \quad \text{con } c, d > 0 \\ Q^d_t & = a - bP_t \quad \text{con } a, b > 0 \end{cases} \tag{3}$$

La condición de equilibrio del mercado $Q^s = Q^d$ significa que los participantes del mercado buscan desocupar el mercado, es decir que lo que se ofrece se demanda. Así, el equilibrio se logrará si,

$$\begin{aligned} a - bP_t & = -c + dP_{t-1} \\ a + c & = bP_t + dP_{t-1}. \end{aligned} \tag{4}$$

El equilibrio determina una relación dinámica del precio del bien (o servicio) a negociar. La anterior ecuación en diferencia se puede expresar como $a+c = bP_t+dP_{t-1}$, es decir $\frac{a+c}{b} = P_{t+1} + \frac{d}{b}P_t$ cuya solución es $P_t = A\left(\frac{-d}{b}\right)^t + P_p$, donde P_p es la solución particular, tal que:

$$P_p = \frac{\frac{a+c}{b}}{1+\frac{d}{b}} = \frac{a+c}{b+d}.$$

Al suponer un precio inicial P_0, entonces $A = P_0 - P_p$, de donde

$$P_t = \left(P_0 - \frac{a+c}{b+d}\right)\left(\frac{-d}{b}\right)^t + \left(\frac{a+c}{b+d}\right).$$

Esta ecuación indica el comportamiento del precio al cual lo que se ofrece se demanda en cada momento en el tiempo. La expresión $\dfrac{a+c}{b+d}$significa el precio sin desfase temporal, es decir, el precio al que se tranzaría si la oferta y la demanda no dependerán del tiempo.

El precio de equilibrio en el modelo dinámico es

$$P_t = \left(P_0 - \widehat{P}\right)\left(\frac{-d}{b}\right)^t + \widehat{P}; \qquad \widehat{P} = \frac{a+c}{b+d}$$

En el largo plazo (es decir, cuando $t \to \infty$) este precio tiende hacia el precio de equilibrio estático, $P_t \to \widehat{P}$ si $|\frac{-d}{b}| < 1$; en caso contrario $P_t \to \pm\infty$.

5. En el modelo de la telaraña, grafique $\{P_t\}$ par cada uno de los siguientes casos y comente sobre la convergencia de las soluciones.

Caso	a	b	c	d	P_0
(i)	1/5	2	1/5	2	100
(ii)	1	2	2	1	100
(iii)	10	25	15	30	100
(iv)	1/5	2	1/5	2	-100

6. El precio P_t del oro en un país en cada período t satisface la ecuación

$$P_t - P_{t-1} = \beta(\phi - P_t),$$

donde ϕ es el precio acordado con sus socios comerciales y $\beta > 0$.

a) ¿Cuál es el precio de equilibrio del oro en esa economía?

b) Encuentra el precio P_t para $t = 0, 1, 2, ...$, suponiendo P_0 dado.

c) Suponga que el precio inicial P_0 no es igual al precio de equilibrio. ¿El precio convergerá hacia el precio de equilibrio o divergerá de él? ¿El precio se moverá de una manera alternante o monótona?