UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE OCCIDENTE

Ecuaciones Diferenciales

Victor Hugo Gil Avendaño

6/02/2019

Solución de una ecuación diferencial

Una solución de una ecuación diferencial de orden n en un intervalo I es una función definida en dicho intervalo que puede derivarse al menos n veces y que, al sustituirse junto con sus derivadas, satisface a la ED. Esto es, resulta una identidad para los valores de x en el intervalo I.

Ejemplo 1.3.3 *Verificar que las funciones* $y = 3x^2 + 7x + Ce^{-4x}$ *(*$C \in \mathbb{R}$*, constante) son soluciones de la ecuación diferencial*

$$y' + 4y = 12x^2 + 34x + 7.$$

Ejemplo 1.3.4 *Usando derivación implícita, demostrar que las funciones definidas implícitamente por la ecuación*

$$2xy + 3x^2y^2 = 1,$$

son soluciones de la ecuación diferencial:

$$y' = \frac{-2y - 6xy^2}{2x + 6x^2y}.$$

Ejemplo 1.3.5 *Encontrar los valores de r de tal manera que la función $y = e^{rx}$ sea solución de la ecuación diferencial:*

$$y'' + 7y' + 12y = 0.$$

Ejemplo 1.3.6 *Encontrar los valores de r de tal manera que la función $y = x^r$ sea solución de la ecuación diferencial:*

$$x^2y'' - xy' - 3y = 0.$$

Resolver una ecuación diferencial es encontrar todas sus soluciones, es decir, es encontrar su conjunto solución. Siempre que sea posible, al resolver una ecuación diferencial hay que especificar en qué intervalo está definida cada función del conjunto solución.

Ejemplo 1.3.7 *Probar que $\dfrac{x^3}{3} + x + \dfrac{y^2}{2} - 2y = C$ define implícitamente la solución general de la ED:*

$$(x^2 + 1)\,dx + (y - 2)\,dy = 0.$$

Tipos de soluciones de ecuaciones diferenciales

Al resolver una ecuación diferencial se encuentran comúnmente dos tipos de soluciones:

1. Una solución particular es la que representa una solución específica de la ecuación diferencial.
   a. En el ejemplo 1.3.6 hemos visto que $y_1 = x^3$ es una solución particular de la ecuación diferencial,
   $$x^2y'' - xy' - 3y = 0,$$
   para todo $x \in \mathbb{R}$.
   b. Análogamente, en el ejemplo 1.3.5 vemos que $y_2 = e^{-3x}$ es una solución particular de
   $$y'' + 7y' + 12y = 0.$$

2. Una solución general representa a una familia de funciones que satisfacen la ecuación diferencial. Esta representación de la familia necesariamente incluye una o varias constantes arbitrarias, como se ve en los siguientes ejemplos:

a. La familia de funciones $y = x^3 + 4x^2 + 2x + C$ ($C \in \mathbb{R}$) es solución general de $y' = 3x^2 + 8x + 2$, como se aprecia de inmediato al derivar.

b. Podemos decir, ampliando el anterior ejemplo, que si

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

entonces se tiene que

$$y = F(x) + C$$

es solución general de la ecuación diferencial $y' = f(x)$. En cierta forma la infinidad de soluciones de las ecuaciones diferenciales proviene de este hecho.

c. Las funciones $y_1(x) = A\cos 3x$ & $y_2(x) = B\,\text{sen}\,3x$, para cualesquiera valores de A & B, son ambas soluciones de

$$y'' + 9y = 0,$$

como se comprueba de inmediato al derivar pues $y_1'' = -9A\cos 3x$ & $y_2'' = -9B\,\text{sen}\,3x$, de modo que al sustituir en la ecuación diferencial resulta

$$y_1'' + 9y_1 = -9A\cos 3x + 9A\cos 3x = 0 \quad \text{y similarmente}$$
$$y_2'' + 9y_2 = -9B\,\text{sen}\,3x + 9B\,\text{sen}\,3x = 0;$$

$$y_3 = A\cos 3x + B\,\text{sen}\,3x$$

es solución general de la misma ecuación diferencial.

Además de los tipos anteriores, algunas ecuaciones diferenciales que se encuentran en raras ocasiones en la práctica admiten un tercer tipo de soluciones llamadas singulares, además de la solución general y particular. Tal es el caso por, ejemplo, de la ecuación diferencial

$$y' = 2(x - \sqrt{x^2 - y}).$$

Cuya solución general es

$$y = 2px - p^2,$$

donde p es una constante arbitraria. Por otra parte, si consideramos la función $y = x^2$, nos encontramos con que es otra solución de $y' = 2(x - \sqrt{x^2 - y})$. Lo interesante de este ejemplo es que $y = x^2$ no es una solución particular obtenida de la solución general $y = 2px - p^2$; por tal motivo a $y = x^2$ se le llama una solución singular.

Ejercicios 1.3.1 *Soluciones de ecuaciones diferenciales.*
En cada uno de los siguientes ejercicios se presenta una ecuación diferencial y una función. Verificar que la función es solución de la ED. En cualquier caso, las C (con subíndice o sin él) que aparecen son constantes.

1. $xy' + y = \cos x; \quad y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

2. $y' - (\tan x)y = 0; \quad y = \dfrac{C}{\cos x}$.

3. $L\dfrac{di}{dt} + Ri = E; \quad i = \dfrac{E}{R} + Ce^{-\frac{R}{L}t}$, donde $L \neq 0$, $R \neq 0$ & E son constantes dadas y C es una constante arbitraria.

4. $yy' = x - 2x^3; \quad y = x\sqrt{1 - x^2}$.

5. $y' = 3y^2; \quad y = -\dfrac{1}{3x + C}$.

6. $x \operatorname{sen} x \dfrac{dy}{dx} + (\operatorname{sen} x + x \cos x)y = xe^x; \quad y = \dfrac{e^x(x-1) + C}{x \operatorname{sen} x}$.

7. $y' + y\cos x = \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2x; \quad y = \operatorname{sen} x - 1 + Ce^{-\operatorname{sen} x}.$

8. $x\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}} = \left(1+\sqrt{1-x^2}\right)e^x; \quad y = \left(\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)(e^x + C).$

9. $y\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + 2x\dfrac{dy}{dx} - y = 0; \quad y^2 = 2Cx + C^2.$

10. $y' = e^{(x-y)}; \quad y = \ln(C + e^x).$

11. $xy\left[1 - \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right] = (x^2 - y^2 - a^2)\dfrac{dy}{dx}; \quad y^2 = Cx^2 - \dfrac{a^2C}{1+C}.$

12. $(x^2 + y^2)dx - 2xy\,dy = 0; \quad y = \sqrt{x^2 - Cx}.$

13. $(x - y)dx + x\,dy = 0; \quad y = x(C - \ln x).$

14. $xy' = y\tan(\ln y); \quad y = e^{\operatorname{arcsen}(Cx)}.$

15. $\dfrac{d^3y}{dx^3} + \dfrac{3}{x}\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0; \quad y = C_1x + \dfrac{C_2}{x} + C_3.$