UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Curso: CÁLCULO I
Profesor: *Victor Hugo Gil A.* 2019 – 1

Funciones # 1

Función

1. ¿Qué es una función?
2. ¿Qué son el dominio y el rango de una función numérica?
3. Qué significado tienen: variable dependiente e independiente
4. Cómo se define la gráfica de una función numérica.

S/.

1. Una definición de función puede ser esta: es una relación entre los elementos de dos conjuntos A y B, donde cada elemento "x" de A se relaciona con un y solo un elemento "y" de B.
2. Al conjunto A se le llama dominio de la función
   Al conjunto B " " " codominio " " "

3. El elemento "x" de A relacionado con el elemento "y" de B mediante la función f, se llama la preimagen de "y". El elemento "y" se llama la imagen de "x" y se escribe así: $y = f(x)$. Se lee así: "y" igual a f de x"

$f: A \longrightarrow B$

4. Aquellos elementos del conjunto B que tienen preimagen conforman el Rango de f. (O recorrido)

5. La variable "x" se llama variable independiente. La variable "y" se llama variable dependiente.

6. En una función numérica, el dominio estará conformado por aquellos valores de "x", de tal forma que "f(x)" tenga "sentido" (o bien definido)

Ej:

$$\left.\begin{array}{l} f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

1. $f(1) = ?$, $f(0) = ?$, $f(3) = ?$
2. ¿Cuál es la imagen de $\sqrt{3}$?
3. ¿Cuál es la preimagen de $\frac{1}{5}$?
4. $D_f = ?$

S/. 1. $f(1) = \dfrac{1}{\sqrt{1^2-1}} = \dfrac{1}{0}$ N.D. $\Rightarrow \boxed{1 \notin D_f}$

$f(0) = \dfrac{1}{\sqrt{0^2-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{-1}} \notin \mathbb{R} \Rightarrow \boxed{0 \notin D_f}$

$f(3) = \dfrac{1}{\sqrt{3^2-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{9-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{8}} \Rightarrow \boxed{3 \in D_f}$

2. $f(\sqrt{3}) = \dfrac{1}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 - 1}} = \dfrac{1}{\sqrt{3-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{\sqrt{3} \in D_f}$

3. Preguntan lo sgte. : para qué valor de x $f(x) = \frac{1}{5}$, es decir, $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{1}{5}$. El problema ahora consiste en resolver la anterior ecuación

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{5} \Rightarrow 5 = \sqrt{x^2-1} \Rightarrow 25 = x^2 - 1$$

$$\Rightarrow x^2 = 26 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{26} \Rightarrow |x| = \sqrt{26} \Rightarrow \boxed{x = \pm\sqrt{26}}$$

4. $D_f = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 - 1 > 0 \}$

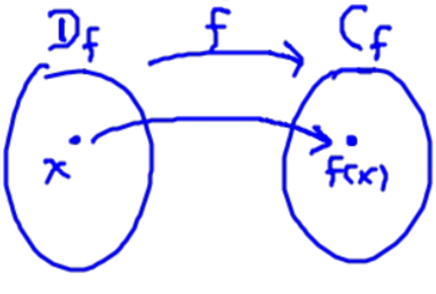
$$x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow \sqrt{x^2} > \sqrt{1} \Rightarrow$$

$$|x| > 1 \Rightarrow x < -1 \;\vee\; x > 1$$

$$\boxed{\begin{array}{l} |x| > a \Rightarrow x < -a \vee x > a \\ D_f = (-\infty, -1) \cup (1, \infty) = \mathbb{R} - [-1, 1] \end{array}}$$

Formas de representar funciones

Diagramas sagitales



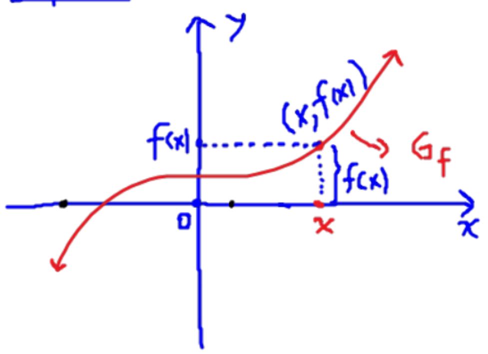
Tablas

x	y
1	0
2	-2
5	0
$\vdots$	

Conjuntos de parejas ordenadas

$$f = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots (x_n, y_n)\}$$

Gráficas



$$G_f = \{(x, y) / x \in D_f \wedge y = f(x)\}$$

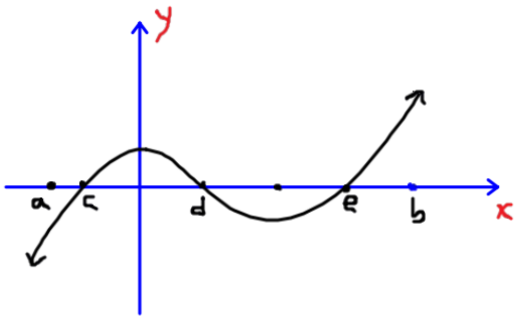
Fórmulas :

$$y = \sqrt{x^3 - 2}$$ ("y" en función de "x")

Características de una función

Sea $f(x)$ una función de variable real y valor real. Se dice que f es:

1. Positiva en un intervalo I si $f(x) > 0, \forall x \in I$

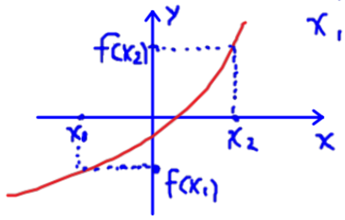


En el intervalo $[a, b]$ f es positiva para $x \in (c, d) \cup (e, b]$

2. Negativa en un intervalo I si $f(x)<0, \forall x \in I$

3. Creciente en I si para $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

$x_1, x_2 \in D_f$



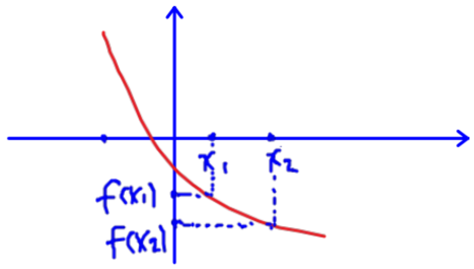
$f(x) = 2x^3 - 6$

$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \Rightarrow$

$2x_1^3 < 2x_2^3 \Rightarrow 2x_1^3 - 6 < 2x_2^3 - 6 \Rightarrow$

$f(x_1) < f(x_2)$

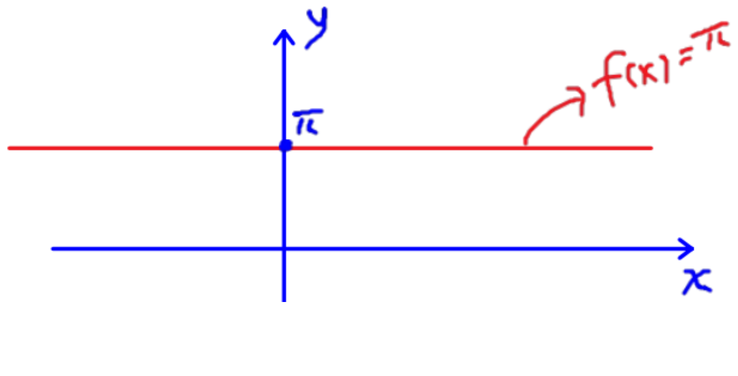
4. Decreciente en I si para $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$



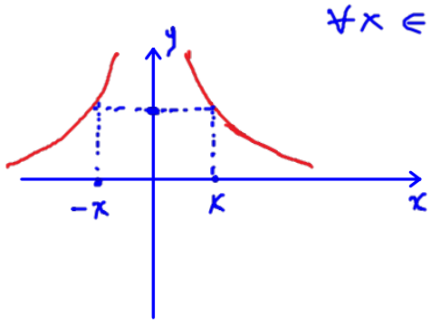
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

5. Constante si $f(x) = c \quad \forall x \in D_f$,
c una constante real

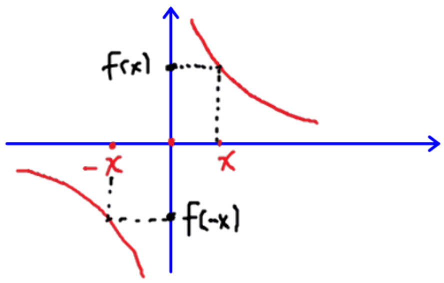
ej: $f(x) = \pi$, $x \in \mathbb{R}$



6. Par o simétrica con respecto al eje y si $\underline{f(x) = f(-x)}$ $\forall x \in D_f$



7. Impar o simétrica con respecto al origen si $f(-x) = -f(x)$



Una función no puede ser simétrica con resp. al eje x

Ej: ¿ $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^4+6}$ es par ?

s/ $f(-x) = \dfrac{(-x)^2-1}{(-x)^4+6} = \dfrac{x^2-1}{x^4+6} = f(x) \Rightarrow f$ es par

Ej: $g(w) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{w}}$, ¿es par?, ¿es impar?

s/ $g(-w) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{-w}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{-1 \cdot w}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{-1} \cdot \sqrt[3]{w}} =$

$= \dfrac{1}{-1 \cdot \sqrt[3]{w}} = \dfrac{1}{-\sqrt[3]{w}} = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{w}} = -g(w) \Rightarrow$

g es impar

Funciones a trozos

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x_1 < x < x_2 \\ f_2(x) & \text{si } x_2 < x < x_3 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

Ej:

$$f(x) = \begin{cases} 2x-3 & \text{si } x \leq 5 \\ \dfrac{1}{x-5} & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

$f(0) = -3$ $\quad f(\pi) = 2\pi - 3$ $\quad f(5) = 7$ $\quad f(6) = 1$

Algebra de funciones

Def

Suma: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

Resta: $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

Producto: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

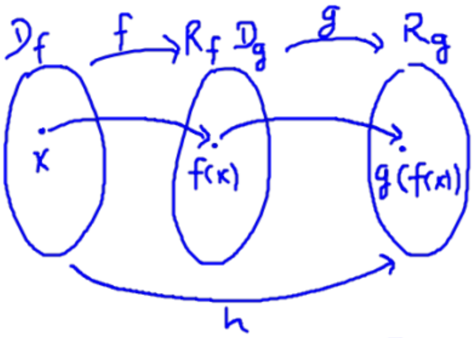
División: $(f \div g)(x) = f(x) \div g(x)$ si $g(x) \neq 0$

Ej: Realice las operaciones anteriores para $f(x) = 2x^3 - x + 1$
$g(x) = 2x+3$

Producto: $(2x^3 - x + 1)(2x+3) = 4x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 3x + 2x + 3 =$
$= 4x^4 + 6x^3 - 2x^2 - x + 3$

Suma: ... Resta ...

Composición de funciones



Dadas f y g se define h así:

$$h = g \circ f$$

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$D_{g \circ f} = \{ x \in D_f \wedge f(x) \in D_g \}$$

Haga ud. lo semejante para definir $f \circ g$

Ej: $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ $\qquad g(x) = \dfrac{1}{x-2}$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{1}{f(x) - 2} = \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{x}} - 2}$$

$$D_{g \circ f} = \{ x \in D_f \wedge f(x) \in D_g \} \quad ; \quad \begin{aligned} D_f &= (0, \infty) \\ D_g &= \mathbb{R} - \{2\} \end{aligned}$$

$$\Updownarrow$$

$$x \in (0, \infty) \wedge \frac{2}{\sqrt{x}} \neq 2 \iff x \in (0, \infty) \wedge x \neq 1$$

$$\Downarrow$$

$$2 \neq 2 \cdot \sqrt{x}$$
$$\frac{2}{2} \neq \sqrt{x}$$
$$1 \neq \sqrt{x}$$
$$\boxed{1 \neq x}$$

$$D_{g \circ f} = (0, 1) \cup (1, \infty) = (0, \infty) - \{1\}$$