UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Curso: CÁLCULO I
Profesor: Victor Hugo Gil A. 2018 – 2

Funciones # 1

Función

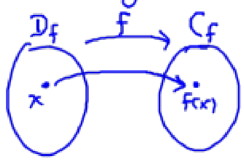
1. ¿Qué es una función?
2. ¿Qué son el dominio y el rango de una función numérica?
3. Qué significado tienen: variable dependiente e independiente
4. Cómo se define la gráfica de una función numérica.

S/

1. Una definición de función puede ser esta: es una relación entre los elementos de dos conjuntos A y B, donde cada elemento "x" de A se relaciona con un y solo un elemento "y" de B.
2. Al conjunto A se le llama dominio de la función
Al conjunto B " " " codominio " " "
3. El elemento "x" de A relacionado con el elemento "y" de B mediante la función f, se llama la preimagen de "y". El elemento "y" se llama la imagen de "x" y se escribe así: $y = f(x)$. Se lee así: "y" igual a f de "x"
$f: A \longrightarrow B$
4. Aquellos elementos del conjunto B que tienen preimagen conforman el Rango de f. (O recorrido)
5. La variable "x" se llama variable independiente. La variable "y" se llama variable dependiente.
6. En una función numérica, el dominio estará conformado por aquellos valores de "x", de tal forma que "f(x)" tenga "sentido" (o bien definida)

Formas de representar funciones

Diagramas sagitales



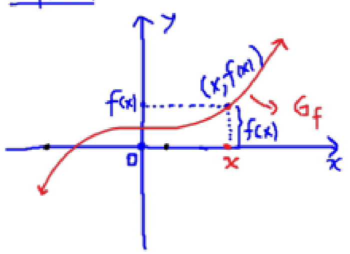
Tablas

x	y
1	0
2	−2
5	0
⋮	

Conjuntos de parejas ordenadas

$$f = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots (x_n, y_n)\}$$

Gráficas



$$G_f = \{(x, y) / x \in D_f \wedge y = f(x)\}$$

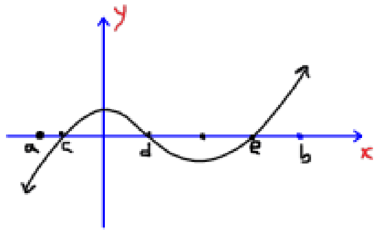
Fórmulas : $y = \sqrt{x^3 - 2}$ ("y" en función de "x")

Enunciados verbales:

Características de una función

Sea $f(x)$ una función de variable real y valor real.
Se dice que f es:

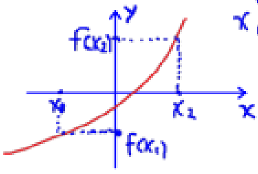
1. Positiva en un intervalo I si $f(x) > 0, \forall x \in I$



En el intervalo $[a,b]$ f es positiva para $x \in (c,d) \cup (e,b]$

2. Negativa en un intervalo I si $f(x) < 0, \forall x \in I$

3. Creciente en I si para $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

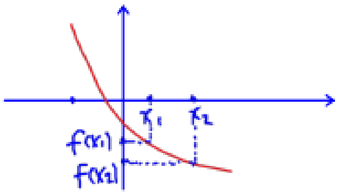


$x_1, x_2 \in D_f$

$f(x) = 2x^3 - 6$

$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \Rightarrow$
$2x_1^3 < 2x_2^3 \Rightarrow 2x_1^3 - 6 < 2x_2^3 - 6 \Rightarrow$
$f(x_1) < f(x_2)$

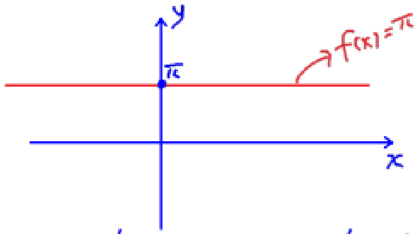
4. Decreciente en I si para $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$



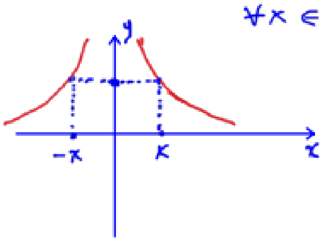
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

5. Constante si $f(x) = c \quad \forall x \in D_f$,
c una constante real

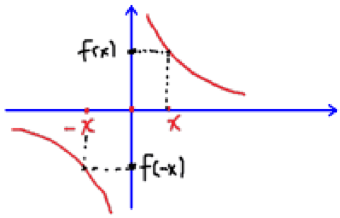
Ej: $f(x) = \pi \;,\; x \in \mathbb{R}$



6. Par o simétrica con respecto al eje y si $\underline{f(x) = f(-x)}$
$\forall x \in D_f$



7. Impar o simétrica con respecto al origen si $f(-x) = -f(x)$



Una función no puede ser simétrica con resp. al eje x

Ej: ¿ $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^4+6}$ es par ?

s/ $f(-x) = \dfrac{(-x)^2-1}{(-x)^4+6} = \dfrac{x^2-1}{x^4+6} = f(x) \Rightarrow f$ es par

Ej: $g(w) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{w}}$, ¿es par?, ¿es impar?

s/ $g(-w) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{-w}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{-1 \cdot w}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{-1} \cdot \sqrt[3]{w}} =$

$= \dfrac{1}{-1 \cdot \sqrt[3]{w}} = \dfrac{1}{-\sqrt[3]{w}} = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{w}} = -g(w) \Rightarrow$

g es impar

Funciones a trozos

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x_1 < x < x_2 \\ f_2(x) & \text{si } x_2 < x < x_3 \\ \vdots & \quad \vdots \end{cases}$$

Ej:

$$f(x) = \begin{cases} 2x-3 & \text{si } x \leq 5 \\ \dfrac{1}{x-5} & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

$f(0) = -3 \qquad f(\pi) = 2\pi - 3 \qquad f(5) = 7 \qquad f(6) = 1$

Algebra de funciones

Def.

Suma: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

Resta: $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

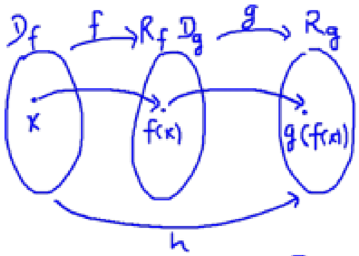
Producto: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

División: $(f \div g)(x) = f(x) \div g(x)$ si $g(x) \neq 0$

Ej: Realice las operaciones anteriores para $f(x) = 2x^3 - x + 1$
$g(x) = 2x+3$

Producto: $(2x^3 - x + 1)(2x+3) = 4x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 3x + 2x + 3 =$
$= 4x^4 + 6x^3 - 2x^2 - x + 3$

Composición de funciones



Dadas f y g se define h así:

$$h = g \circ f$$

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$D_{g\circ f} = \{x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\}$$

Haga ud. lo semejante para definir $f \circ g$

Ej: $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ $\qquad g(x) = \dfrac{1}{x-2}$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{1}{f(x) - 2} = \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{x}} - 2}$$

$D_{g\circ f} = \{x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\}$; $\quad D_f = (0, \infty)$, $\quad D_g = \mathbb{R} - \{2\}$

$\Updownarrow$

$x \in (0, \infty) \wedge \dfrac{2}{\sqrt{x}} \neq 2 \iff x \in (0, \infty) \wedge x \neq 1$

$\Downarrow$

$2 \neq 2 \cdot \sqrt{x}$

$\frac{2}{2} \neq \sqrt{x}$

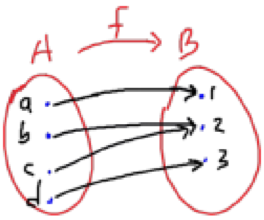
$1 \neq \sqrt{x}$

$\boxed{1 \neq x}$

$D_{g\circ f} = (0,1) \cup (1, \infty)$

$= (0, \infty) - \{1\}$

Def



Se dice que una función f es inyectiva, o, uno a uno, si para todo $x_1, x_2 \in D_f$:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \quad \text{o}$$

equivalentemente:

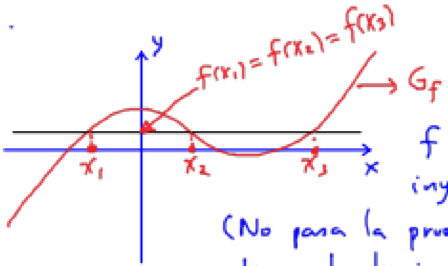
$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Ej: El gráfico anterior es una función no inyectiva

Ej: ¿ $f(x) = 2x^4 + 1$ es una función inyectiva?

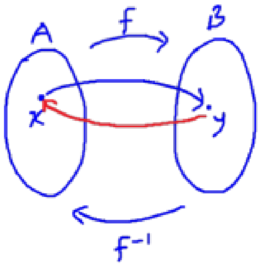
S/. $x_1 \neq x_2 \not\Rightarrow x_1^4 \neq x_2^4$. De hecho:

$2 \neq -2 \wedge f(2) = f(-2) = 33 \Rightarrow f$ no es uno a uno.



f no es inyectiva (No pasa la prueba de la recta horizontal)

Inversa de una función



A: D_f B: R_f

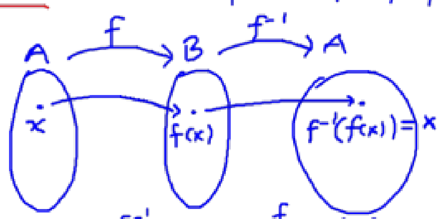
Denotaremos la inversa de f como f^{-1}.

¡¡No confunda f^{-1} con $\frac{1}{f}$!!

$$f(x) = y \Longleftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

$$f(f^{-1}(y)) = y \qquad f^{-1}(f(x)) = x$$

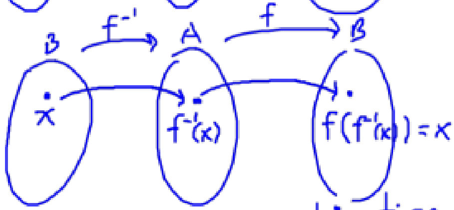
NOTA: Para definir f^{-1}, f debe ser inyectiva



f y f^{-1} cumplen:

$(f \circ f^{-1})(x) = x$

$(f^{-1} \circ f)(x) = x$



Formalmente: f y g $\underbrace{}_{}$ son inversas, si y solo si
biyectivas

1) $(f \circ g)(x) = x$

2) $(g \circ f)(x) = x$

¿Cómo calcular f^{-1}, dada f?

S/. Procedimiento: Dada $y=f(x)$:

1. Intercambie "y" con "x"
2. Despeje "y"   3. Defina f^{-1} 4. Pruebe $(f^{-1}\circ f)(x)=x$ ó $(f\circ f^{-1})(x)=x$

Ej: Dada la función biyectiva $f(x)=\dfrac{x+1}{2x-7}$ (Pruébelo), calcule f^{-1}:

S/ $y=\dfrac{x+1}{2x-7}$.

1. Intercambio "y" con "x": $x=\dfrac{y+1}{2y-7}$

2. $x=\dfrac{y+1}{2y-7} \Rightarrow x(2y-7)=y+1 \Rightarrow 2xy-7x=y+1$
$\Rightarrow 2xy-y=7x+1 \Rightarrow y(2x-1)=7x+1$
$\Rightarrow y=\dfrac{7x+1}{2x-1}$

3. $\boxed{f^{-1}(x)=\dfrac{7x+1}{2x-1}}$

$\boxed{f(x)=\dfrac{x+1}{2x-7}}$

Ej: $\begin{cases} f(2)=\dfrac{3}{-3}=-1 \\ f^{-1}(-1)=\dfrac{7(-1)+1}{2(-1)-1}=\dfrac{-7+1}{-2-1}=\dfrac{-6}{-3}=2 \end{cases}$

4. $(f\circ f^{-1})(x)=f(f^{-1}(x))=$

$$=\frac{f^{-1}(x)+1}{2.f^{-1}(x)-7}=\frac{\frac{7x+1}{2x-1}+\frac{1}{1}}{2\cdot\frac{7x+1}{2x-1}-7}=$$

$$=\frac{\frac{7x+1+2x-1}{2x-1}}{\frac{14x+2}{2x-1}-\frac{7}{1}}=\frac{\frac{9x}{2x-1}}{\frac{14x+2-14x+7}{2x-1}}=\frac{\frac{9x}{2x-1}}{\frac{9}{2x-1}}=\frac{\cancel{9}x\cancel{(2x-1)}}{\cancel{(2x-1)}\cdot\cancel{9}}=x$$

Muestre ud. que $(f^{-1}\circ f)(x)=x$.

Calcular $D_{f^{-1}}$ equivale a calcular R_f