DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Universidad Autónoma de Occidente

Cálculo II (131230 - Gr 3)

Campos escalares, vectoriales e integrales de línea

1. Calcular $\|\mathbf{F}\|$ y dibujar varios vectores representativos del campo vectorial

$$\mathbf{F(x,y)} = (x^2+y^2)\mathbf{i}+\mathbf{j}.$$

2. Hallar el campo vectorial conservativo para la función potencial $f(x,y,z) = x\ \arcsin(yz)$, encontrando su gradiente.

3. Determinar si los siguientes campos vectoriales son conservativos. Si lo es, calcular una funcion potencial para él.

   a) $\mathbf{F(x,y)} = xe^{x^2y}(y\mathbf{i}+x\mathbf{j})$

   b) $\mathbf{F(x,y,z)} = \dfrac{x}{x^2+y^2}\mathbf{i}+\dfrac{y}{x^2+y^2}\mathbf{j}+\mathbf{k}$

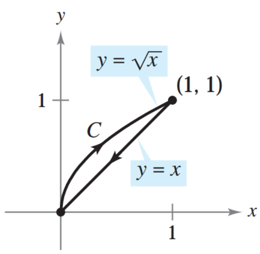
4. Sea $\mathbf{F(x,y,z)} = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ y $f(x,y,z) = \|\mathbf{F(x,y,z)}\|$. Muestre que

   a) $\nabla(\ln(f)) = \dfrac{\mathbf{F}}{f^2}$

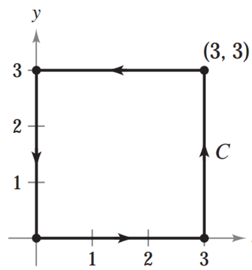
   b) $\nabla(\ln(\frac{1}{f})) = -\dfrac{\mathbf{F}}{f^3}$

5. Halle una parametrización suave a trozos de la trayectoria C. (Nótese que existe más de una respuesta correcta)

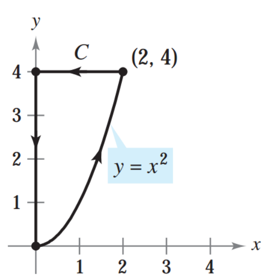
a)



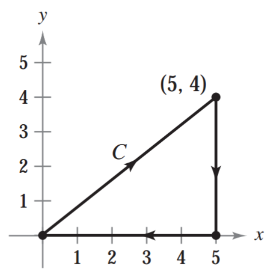
c)



b)



d)



Definición 0.1: Evaluación de una integral de línea para campos escalares

Sea f una función continua en una región que contiene una curva suave C. Si C está dada por $\gamma(t)$, donde $a \leq t \leq b$, entonces

$$\int_C f\,ds = \int_a^b f(\gamma(t))\ \|\gamma'(t)\|\ dt$$

6. Hallar una parametrización de la trayectoria C, y evaluar $\int_C (x + \sqrt{y})\,ds$ a lo largo de la curva C:

   a) C : eje x de $x = 0$ a $x = 1$.

   b) C : eje y de $y = 1$ a $y = 9$.

   c) C : triángulo cuyos vértices son $(0,0), (1,0) y (0,1)$, recorrido en sentido contrario a las manecillas del reloj.

   d) C : cuadrado cuyos vértices son $(0,0), (2,0), (2,2)$ y $(0,2)$, recorrido en sentido contrario a las manecillas del reloj.

Definición 0.2: Evaluación de una integral de línea para campos Vectoriales

*Sea **F** un campo vectorial continuo definido sobre una curva suave C dada por $\gamma(t)$, donde $a \leq t \leq b$, entonces **la integral de línea de** F sobre C está dada por*

$$\int_C \mathbf{F}\,d\gamma = \int_a^b \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt$$

*Si **F** es un campo de fuerzas, la integral anterior representa el trajo realizado por el campo de fuerzas cuando un objeto se mueve a lo largo de la curva C.*

7. Determine el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\mathbf{F(x,y,z)} = (2x - y)\mathbf{i} + (x + 3y)\mathbf{j}$ sobre una partícula que se mueve a lo largo de la trayectoria dada

   a) C : eje x de $x = 0$ a $x = 5$.

   b) C : eje y de $y = 0$ a $y = 2$.

   c) C : arco sobre $y = 1 - x^2$ desde $(0,1)$ hasta $(1,0)$.

   d) C : trayectoria elíptica $x = 4\sin(t)$, $y = 3\cos(t)$, desde $(0,3)$ hasta $(4,0)$.