$$\int_a^b \frac{d}{dx} F(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0, \qquad \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

El área entre dos curvas desde $x = a$ hasta $x = b$ es

$$\int_a^b (y_{\text{superior}} - y_{\text{inferior}})\,dx$$

Valor presente $= \int_0^T f(t)e^{-rt}\,dt$, en donde $r = R/100$

$$\text{SC} = \int_0^{x_0} [f(x) - p_0]\,dx$$

$$\text{SP} = \int_0^{x_0} [p_0 - g(x)]\,dx$$

en donde $\begin{cases} p = f(x) \text{ es la relación de la demanda} \\ p = g(x) \text{ es la relación de la oferta} \\ (x_0, p_0) \text{ es el punto de equilibrio del mercado} \end{cases}$

Valor promedio de f: $\bar{f} = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

Regla del trapecio:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \tfrac{1}{2}h\,\{y_1 + 2(y_2 + y_3 + \cdots + y_n) + y_{n+1}\}$$

Regla de Simpson:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \tfrac{1}{3}h\,\{y_1 + y_{n+1} + 2\,(\text{Suma de } y_j \text{ para } j \text{ impar}) + 4\,(\text{Suma de } y_j \text{ para } j \text{ par})\}$$

La solución general de la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dt} = ky \text{ es } y = Ce^{kt}$$

La solución general de la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dt} = ky + b \text{ es } y = Ce^{kt} - \frac{b}{k}$$

Ecuación diferencial logística: $\dfrac{dy}{dt} = py(m - y)$

Función logística: $y = \dfrac{m}{1 + Ae^{-kt}}$ $(k = pm)$

$$P(c \le x \le d) = \int_c^d f(x)\,dx, \qquad \mu = \int_c^d xf(x)\,dx$$

PROBLEMAS DE REPASO DEL CAPÍTULO 16

1. Establezca la veracidad o falsedad de cada una de las siguientes proposiciones. Cada enunciado falso cámbielo por una proposición verdadera correspondiente.

a) $\displaystyle\int_a^b kf(x)dx = \int_{ka}^{kb} f(x)dx$

b) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

c) $\displaystyle\frac{d}{dx}\left[\int_a^b f(x)dx\right] = f'(x)$

d) Si $f(x)$ es una función continua en $a \le x \le b$, entonces, el área entre $y = f(x)$, el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ está dada por $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$

e) $\displaystyle\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right] = f(x) - f(a)$

f) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ es válida siempre y cuando $a \le c \le b$

g) $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(s)ds$

h) Una solución de la ecuación diferencial $12\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2$ es la función $y(x) = x^3$

i) La ecuación diferencial $dy/dt = e^{t+y}$ se puede resolver por el método de separación de variables.

j) La ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = \ln(x)$ es una ecuación logística.

k) La ecuación diferencial $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = y - x$ es de segundo orden.

l) Si $f(x)$ es la función de densidad de una variable aleatoria continua, entonces, el área total bajo la curva es igual a 1.

m) La probabilidad de que una variable aleatoria tome un valor mayor que su media es 0.5.

n) La función $f(x) = x^2$, si $0 \le x \le 1$ y $f(x) = 0$ en otro caso, puede ser la función de densidad de una variable aleatoria continua.

o) Si X es una variable aleatoria continua, entonces, la probabilidad de que la variable tome un valor particular es cero.

p) Si X es una variable aleatoria continua, entonces, el valor esperado de X se calcula mediante $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$, en donde $f(x)$ es la f.d.p.

2. Demuestre que $\int_a^{ab} \frac{1}{t}dt = \int_1^b \frac{1}{t}dt$

(3-8) En cada caso, calcule el área bajo las gráficas de las siguientes funciones entre los valores de x dados.

3. $f(x) = x \ln x$, $x = 1$, $x = e^3$

4. $f(x) = e^{-x}$, $x = 0$, $x = 1$

5. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x = 1$, $x = 9$

6. $f(x) = e^x + e^{-x}$, $x = 0$, $x = 1$

7. $f(x) = 3xe^{-x^2}$, $x = -1$, $x = 1$

8. $f(x) = \frac{3x^2}{1 + x^3}$, $x = 0$, $x = 2$

9. Calcule el área acotada por las curvas $y = 3 + 2x - x^2$ y $y = x^2 - 4x + 3$

10. Determine el área acotada por las curvas $y = x^2$ y $y = 2 - x$

11. *(Curva de aprendizaje)* Después de pintar las primeras 400 piezas, una compañía fabricante de muebles para oficina estima que la curva de aprendizaje es de la forma $f(x) = 20x^{-0.20}$. Determine el número total de horas-hombre que se requerirán con la finalidad de pintar 200 piezas más.

12. *(Decisión de inversión)* Verónica Pérez está considerando la compra de un nuevo equipo de ensamblado, con un costo de \$50,000. Ella estima que el equipo ahorrará dinero a la compañía a una tasa de $2000(4 + t)$ pesos anuales, en un tiempo t después de haberse adquirido. ¿Se pagará la máquina a sí misma durante los próximos 4 años?

13. *(SC y SP)* Si supone que se ha establecido el equilibrio del mercado, determine el superávit del consumidor y del productor, en caso de que la función de demanda sea $p = 20 - x$ y la función de oferta sea $p = \frac{1}{324}x^2 + 1$

14. *(Curva de Lorentz)* La distribución del ingreso de cierto país está descrita por la curva de Lorentz $y = \frac{4}{5}x^2 + \frac{1}{5}x$, en donde x es la proporción de captadores de ingresos y y es la proporción del ingreso total recibido.

a) ¿Qué proproción recibe el 10% de la gente más pobre?

b) Determine el coeficiente de desigualdad de la curva de Lorenz.

(15-22) Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales.

15. $dy/dt = 3t^2$

16. $dy/dx = x(y - 1)$

17. $dy/dt + ty = y$

18. $dy/dx = e^x y$

19. $du/dt = u^2 t$, $u(0) = 1$

20. $dx/dt = t(x + 1)^2$, $x(1) = 0$

21. $dy/dx - x^3 y = 0$, $y(1) = 2$

22. $dy/dx = e^{2x-y}$, $y(0) = 0$

***23.** *(Modelo logístico)* En una ciudad cuya población es de 100,000 personas, la propagación de una epidemia de influenza sigue la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = py(100{,}000 - y)$$

en donde y es el número de personas infectadas en el instante t (medido en semanas) y $p = 0.00001$. Si inicialmente diez personas estaban enfermas, determine y como función de t. ¿Cuánto tiempo pasará antes de que la mitad de la población esté infectada?

24. *(Capitalización continua)* Una inversión de \$5,000 se invierte a una tasa continua de interés nominal del 4%.

a) Determine el valor de la inversión en cualquier instante t.

b) ¿Cuál es el valor de la inversión después de 5 años?

c) ¿Después de cuántos años el valor de la inversión se duplicará?

25. *(Maximización de la utilidad)* Las tasas de costo y de ingreso de una operación de perforación petrolera están dadas por $C'(t) = 9 + 2t^{1/2}$ y $R'(t) = 19 - 3t^{1/2}$, en donde t se mide en años y R y C se miden en millones de dólares. ¿Por cuánto tiempo debera continuarse la perforación? ¿Cuál será la utilidad máxima?

26. *(Tiempo de espera)* Una máquina completa su operación cada 10 minutos. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que llega al azar deba esperar a lo más 2 minutos para que se complete la operación? Determine el tiempo de espera promedio.

(27-30) Decida si cada una de las siguientes puede ser una función de densidad de probabilidad. En caso de que no lo sea, indique la razón de ello.

27. $f(x) = x^2$ en $0 \le x \le 1$

28. $f(x) = |2x - 2| - \frac{1}{2}$, para $x \in [0, 2]$

29. $f(x) = \frac{1}{10}(3x^2 + 1)$ para $x \in [0, 2]$

30. $f(x) = \frac{6}{125}x(5 - x)$ para $x \in [0, 5]$

31. La *mediana* de una variable aleatoria continua X es un valor m tal que $P(X \le m) = 0.5$. Determine la mediana de una variable aleatoria que tiene la f.d.p. $f(x) = \frac{3}{32}x(4 - x)$ para $0 \le x \le 4$.

***32.** Determine la mediana de una variable aleatoria que tiene la f.d.p. $f(x) = \frac{1}{24}(8 - x)$ para $0 \le x \le 4$.

33. *(Duración de llamadas telefónicas)* La duración, en minutos, de las llamadas telefónicas recibidas por los empleados de una empresa siguen una distribución exponencial con f.d.p.

$$f(x) = 0.5e^{-0.5x}$$

¿Cuál es la probabilidad de que una llamada aleatoria recibida por un empleado de la empresa:

a) dure más de 1 minuto?

b) dure más de 3 minutos?

c) no sobrepase los dos minutos?

34. *(Rociado de insecticida)* Sea $y = f(x)$ el porcentaje de mosquitos que sobreviven después del rociado con una cantidad x de insecticida por milla cuadrada. Supongamos que $dy/dx = -ky$, donde k es una constante (llamada la ley exponencial de supervivencia). Si 2000 libras de insecticida por milla cuadrada matan a 40% de los mosquitos, ¿cuánto insecticida se necesita para matar 90% de ellos?

35. *(Tiempo de espera)* El servicio aéreo de la Ciudad de México a la ciudad de Guadalajara se presta cada hora. Una persona que no conoce el programa llega al aeropuerto al azar y espera volar a la ciudad de Guadalajara.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que deberá esperar entre 10 y 30 minutos?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que deberá esperar a lo más 25 minutos?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que deberá esperar no menos de 15 minutos?

36. *(Ingreso promedio)* La función de demanda de un producto es $p = 33 - 0.3x$, donde x unidades pueden venderse a un precio p cada una. Determine el ingreso promedio en el intervalo de venta desde $x = 50$ hasta $x = 100$.

***37.** *(Valor promedio de una inversión)* Ana Jimena invierte \$10,000 al 6% compuesto continuamente. Determine el valor promedio de la inversión, si ésta se invierte durante 5 años.

38. *(Utilidad promedio)* La función de demanda del producto de una empresa es $p = 50 - 0.15x$, donde x unidades pueden venderse al precio p cada una. El costo de producir x unidades está dado por $C(x) = 1500 + 3x$. Determine la utilidad promedio en el intervalo de ventas de $x = 100$ a $x = 200$.

39. Utilice la regla del trapecio y la regla de Simpson para aproximar el valor de $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$; en cada caso, tome ocho subintervalos de la misma longitud. Proporcione su respuesta con cuatro cifras decimales.

40. Utilice ambas reglas, del trapecio y de Simpson, para aproximar el valor de π por medio de la aproximación del valor de la integral $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx$. En cada caso, tome 8 subintervalos iguales. Proporcione su respuesta con cuatro cifras decimales.