UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Curso: CÁLCULO I
Profesor: Victor Hugo Gil A. $febrero/2019$

Límites

Límite de una función

Problema introductorio:

- Dada la función $f(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$ es claro que $D_f = \mathbb{R} - \{3,-3\}$ pero surge una pregunta. ¿qué pasa con las imágenes de los elementos del dominio "cercanos" a $x=3$ y $x=-3$?

Como 3 y $-3 \notin D_f$ entonces $f(3)$ y $f(-3)$ no están definidas

✓ En el caso de $f(3)$ al sustituir obtenemos $\boxed{\frac{0}{0}}$ "forma indeterminada básica".

✓ En el caso de $f(-3)$ al sustituir obtenemos $\boxed{\frac{-6}{0}}$ "esta no es una forma indeterminada"

* Cálculo de límites, de manera numérica.
estimación numérica de límites.

✓ Esta practica nos debe llevar a una idea intuitiva del concepto de límite.

• Respondamos a la pregunta anterior

x	2,9	2,99	2,999	2,9999	2,99999	3	3,00001	3,0001	3,0001	3,001	3.01	3.1
$f(x)$	0,1694	0,16694	0,16669	0,1666694	0,16666694	X	0,16666663	0,1666663	0,166663	0,16663	0,1663	0,16

$x \to 3^-$
$f(x) \to 0{,}166\ldots$

$x \to 3^+$
$f(x) \to 0{,}166\ldots$

• "paradojas Zenón" decir

$$f(x) = \frac{x-3}{x^2-9} \qquad f(3) = \nexists.$$

✓ Mientras la x se aproxima con valores más grandes que tres a tres, sus imágenes se aproximan $0{,}1\widehat{6}$

Límites laterales

• $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 0{,}1\widehat{6}$ o $\lim_{x \to 3^-} f(x) = 0{,}1\widehat{6}$

* Los límites anteriores se llaman límites laterales y cuando estos son iguales se dice que el límite existe

Es decir, podemos concluir: * $\lim_{x \to 3} f(x) = 0{,}1\widehat{6}$ ✓

x	-3.1	-3.01	-3.001	-3.0001	-3	-2.9999	-2.999	-2.99	-2.9
$f(x)$	-10	-100	-1000	-10000	X	10.000	1000	100	10

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = \nexists$$

la función cuando $x \to -3^-$ no tiene límite porque se hace "muy grande" pero negativo, en este caso se usa precisar y escribir

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -3^+} f(x) = \nexists$$

para mayor presición en este caso

$$\lim_{x \to -3^+} f(x) = +\infty.$$

Ej:

*

x	$-0,1$	$-0,01$	$-0,001$	$-0,0001$	0	$0,0001$	$0,001$	$0,01$	$0,1$
$f(x)$	$0,9983$	$0,999983$	$0,99999983$	$0,99999999$	X	$0,99999999$	$0,99999983$	$0,999983$	$0,9983$

Estime numéricamente $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$. límite trigonométrico básico

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$ $\quad \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

por tanto $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1}$

* El uso tablas aunque es útil, podría llevarnos a errores

Ej: Estimemos el siguiente límite

$$\lim_{x\to 0} \underbrace{\operatorname{sen} \frac{\pi}{x}}_{f(x)}$$

✓ que $f(a)$ no exista, no implica que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ no exista

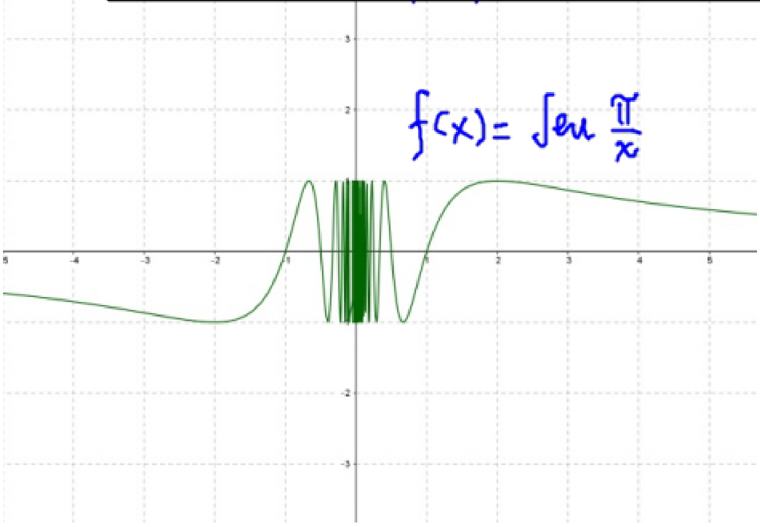
x	$-0,1$	$-0,01$	$-0,001$	$-0,0001$	0	$0,0001$	$0,001$	$0,01$	$0,1$
$f(x)$	0	0	0	0	X	0	0	0	0

Es natural, pero errado, concluir que ~~$\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen}\frac{\pi}{x} = 0$~~

* realice una tabla distinta a la anterior:

- Estimación gráfica de límites

Estimación gráfica de Límites



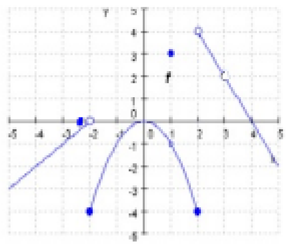
$$f(x) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{x}$$

La gráfica nos muestra que la función oscila entre -1 y 1 cuando x se aproxima a cero, en efecto.

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\frac{\pi}{x} = \nexists .$$

Estimación gráfica de límites

1. (16 ptos.) **Utilice la siguiente gráfica para contestar las preguntas en el espacio asignado:**



$\lim_{x\to 2^+} f(x)$ = 4

$\lim_{x\to -2^-} f(x)$ = 0

$\lim_{x\to -2^+} f(x)$ = -4

$f(-2)$ = -4

$f(1)$ = 3

$\lim_{x\to 4} f(x)$ = -1

∘ $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -4.$

observación

∘ Si el $\lim_{x\to a} f(x)$ existe pero $f(a)$ no existe o $f(a) \neq \lim_{x\to a} f(x)$ entonces en la gráfica hay un "hueco"

• $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 2 = \lim_{x\to 3^+} f(x)$

como los límites laterales son iguales $\lim_{x\to 3} f(x) = 2.$

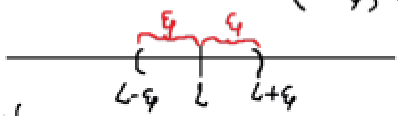
pero! observe que $f(3)$ no está definido

Ej: ✓ $\lim_{x\to -4^-} f(x) = -2$ ✓ $\lim_{x\to -4^+} f(x) = -2$ ✓ $f(-4) = -2$

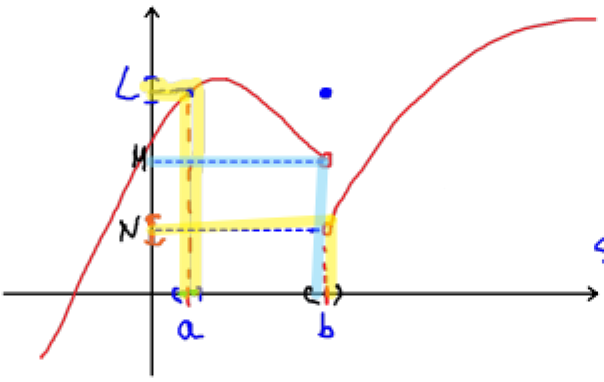
Definición formal de límite.

∘ Vecindad de L., donde $L \in \mathbb{R}$ (abierta) es un intervalo de radio épsilon ε. alrededor de L así: $(L-\varepsilon, L+\varepsilon) = V_\varepsilon(L)$

$\varepsilon > 0$



* Vecindad restringida: $V^*_\varepsilon(L) = V_\varepsilon(L) - \{L\}$



$\lim_{x\to b^-} f(x) = M$; $\lim_{x\to b^+} f(x) = N$

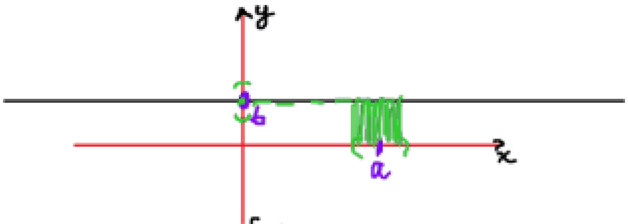
* $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

Definición:
Si para toda vecindad de L existe una vecindad alrededor de a tal que: si $x \in V^*(a)$ entonces $f(x) \in V^*(L)$

* Lo anterior equivale a decir: si para $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que: si $0 < \underbrace{|x-a|}_{\text{distancia entre } x \text{ y } a} < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

* Algunos límites

Sea $f(x) = b$ la función constante



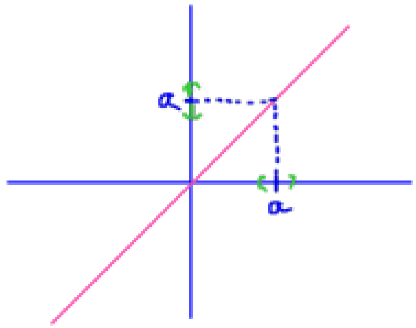
$\lim_{x\to a} \overbrace{b}^{f(x)} = b$ ✓

* límite de una constante es la constante.

Ej: $\lim_{x\to 3} \overbrace{2}^{f(x)} = 2$.

- Sea $f(x) = x$ ✓ $\lim_{x\to a} x = a$

  $f(a) = a$



basta $0 < \delta \leq \varepsilon$; $\delta = \varepsilon$ ✓

$\delta(\varepsilon)$

Ej: $\lim_{x\to 2} x = 2$

Propiedades de los límites

Si $\lim_{x\to a} f(x) = M$ $\lim_{x\to a} g(x) = N$ $k \in \mathbb{R}$. (Estas propiedades se aplican si estos límites existen!)

1. $\lim_{x\to a} f(x) \pm g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = M \pm N$

   Ej: $\lim_{x\to 2} \overbrace{3 + x}^{f(x)} = 3 + 2 = 5 = f(a)$ * no es cierto siempre.

2. $\lim_{x\to a} k f(x) = k \lim_{x\to a} f(x) = kM$ Ej: $\lim_{x\to 2} 3x = 3 \lim_{x\to 2} x = 3(2) = 6$

3. $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$

4. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$

Límite de una potencia

Aplicando las propiedades de los límites deduzca.

1. $\lim_{x\to a} x^2 = \lim_{x\to a} \underbrace{(x)}^{f(x)}\underbrace{(x)}^{g(x)} = \underbrace{\lim_{x\to a} x}\cdot \lim_{x\to a} x = a\cdot a = a^2.$

$$\lim_{x\to a} x^2 = a^2$$

Por inducción:

2. Supongamos que $\lim_{x\to a} x^k = a^k$

Calculemos $\lim_{x\to a} x^{k+1} = \lim_{x\to a} x^k \cdot \lim_{x\to a} x = a^k\cdot a$

$= a^{k+1}$

Los hechos anteriores demuestran que

$$\lim_{x\to a} x^n = a^n \qquad n\in\mathbb{N}.$$

- Pero es cierto en general para $n\in\mathbb{R}$.

$\lim_{x\to a}\sqrt{x} = \sqrt{a}.$ (lea en el texto la generalización)*

Límites infinitos

Definición

Si $\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$ ó $-\infty$ ó $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$ ó $-\infty$

entonces la recta $x=a$ es una asíntota Vertical de la gráfica f.

Ej: $\lim_{x\to -3^-} \frac{x-3}{x^2-9}$ ¿Cómo hacerlo analíticamente?

observe que $\lim_{x\to -3^-} x^2-9 = 0$ ¿Qué se hace cuando la función denominador tiende a cero?

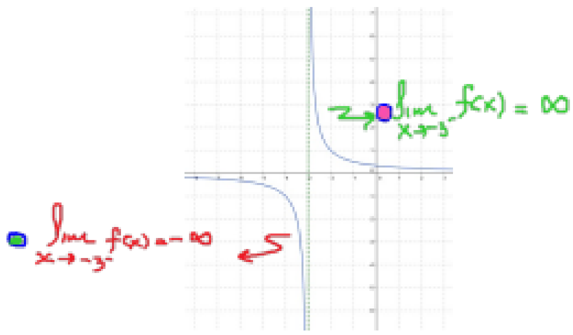
No podemos aplicar las propiedades de los límites, pero por el contrario se usa todas las herramientas del álgebra y la aritmética que poseemos??.

$$\lim_{x\to -3^-} \frac{x-3}{x^2-9} = \lim_{x\to -3^-} \frac{\cancel{x-3}}{(\cancel{x-3})(x+3)} = \lim_{x\to -3^-} \frac{1}{x+3} = -\infty \quad \boxed{\frac{K}{0}}$$

-3

por tanto: la recta $x=-3$ es una asíntota vertical de $f(x)$

Veamos:



Ej: Gráfica.

26. *a)* $f(-2)$ = no está definido

1* *b)* $\lim_{x\to -2} f(x)$ = no existe

c) $f(0) = 4$

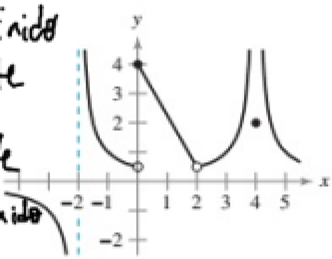
2* *d)* $\lim_{x\to 0} f(x)$ = no existe

e) $f(2)$ = no está definido

f) $\lim_{x\to 2} f(x) \cong 0.5$

g) $f(4) = 2$

3* *h)* $\lim_{x\to 4} f(x)$ no existe



Observación:

1* $\lim_{x\to -2^-} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to -2^+} f(x) = \infty$ ✓

Ej: luego la recta $\underbrace{x=-2}_{\text{la punteada}}$ es una asíntota vertical

2* $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe porque $\lim_{x\to 0^-} f(x) \cong 0.5$ *

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 4.$

3* $\lim_{x\to 4} f(x)$ no existe porque $\lim_{x\to 4} f(x) = \infty$

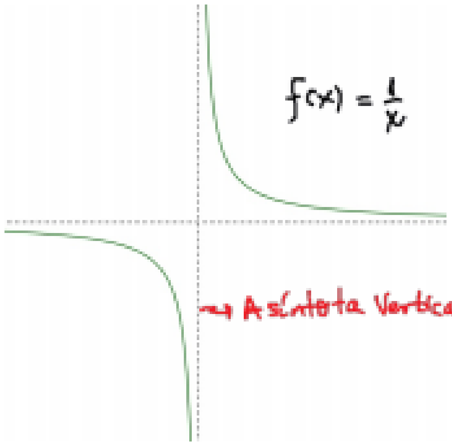
Límites al infinito

Asíntotas horizontales.

Si $\lim_{x \to \infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$ ó $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \overbrace{b}^{\text{número}} \in \mathbb{R}$

entonces la recta, $y = b$ es una asíntota horizontal de $f(x)$

Ej: $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$ por tanto la recta $\underbrace{y = 0}_{\text{Eje "x"}}$ es una asíntota horizontal de $f(x) = \frac{1}{x}$



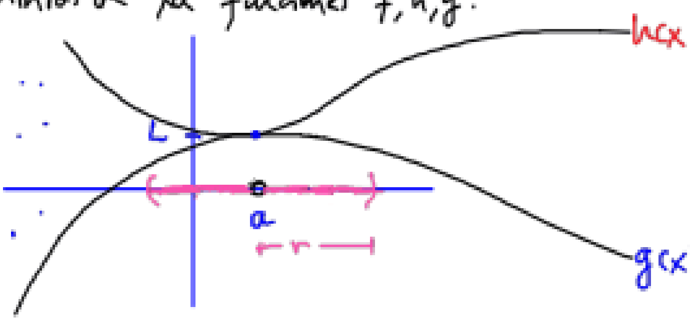
→ $y = 0$ asíntota horizontal (eje x)

→ Asíntota Vertical $x = 0$

$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

Teorema del Emparedador

Sean $f(x)$, $h(x)$ y $g(x)$ funciones definidas en alguna vecindad restringida ó no de a $V_r^*(a)$. Es decir $V_r^*(a)$ es subconjunto de los dominios de las funciones f, h, g.



si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para toda $x \in V_r^*(a)$

si $\lim_{x \to a} g(x) = L = \lim_{x \to a} h(x)$

entonces

$\lim_{x \to a} f(x) = L$

Ej: $f(x) = x \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$ Calcular $\lim_{x \to 0} f(x)$.

• $\lim_{x \to 0} x = 0$ $\quad$ $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$ = no existe.

* En este caso se pueden construir funciones $g(x)$ y $h(x)$ tales que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ en alguna vecindad de cero

✓ $-1 \leq \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} \leq 1$: "la función seno está acotada entre -1 y 1"
• cálculo II

$$\underbrace{-x}_{g(x)} \leq x \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} \leq \underbrace{x}_{h(x)}$$

$$\lim_{x \to 0} -x = 0 \qquad \lim_{x \to 0} x = 0$$

por el teorema del emparedado $\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} = 0$ ✓

Actividad (realice su lectura)

✓ Usando este teorema en el texto se demuestra analíticamente un resultado que ya obtuvimos empíricamente

✓ $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

Pág 118

f) calcular $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+2x} - x = \infty$ ✓

Comportamiento $\boxed{\infty+\infty}$ no es indeterminado

* Calcular $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+2x} + x$ ✓

$\infty - \infty$ Esta sí es una indeterminación

Siempre que obtengamos una indeterminación* debemos "usar" todas nuestras herramientas algebraicas y aritméticas para "intentar" evadir la indeterminación

* $\infty - \infty \; ; \; \frac{0}{0} \; ; \; \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

$$\sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{(\sqrt{x^2+2x} + x)}{1} \frac{(\sqrt{x^2+2x} - x)}{(\sqrt{x^2+2x} - x)} ✓$$

Racionalizar es usar este modelo $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x^2}+2x-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+2x} - x} \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x} - x} \qquad * \boxed{\frac{-\infty}{\infty}}$$

✓ En este caso $\frac{\infty}{\infty}$ * Se divide sobre la potencia más grande de "x"

$$\underbrace{\lim_{x\to-\infty}}\; \frac{\frac{2x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+2x} - x}{x}} = \underbrace{\lim_{x\to-\infty}} \frac{2}{\underbrace{\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}}_{\text{negativo}} - \underbrace{\frac{x}{x}}_{\text{positivo}}} = \underbrace{\lim_{x\to-\infty}} \frac{2}{-\sqrt{\frac{x^2+2x}{x^2}} - 1}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{-\sqrt{1+\frac{2}{x}} - 1} = \frac{2}{-1-1} = -1 ✓$$

* Segundo parcial

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{4x^2+x} + x$$

Teoremas sobre límites

1. Si $f(x) = K$; K constante

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} K = K$$

2. Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$, entonces

a) $\lim_{x \to a} K.f(x) = K.\lim_{x \to a} f(x) = K.L$

b) $\lim_{x \to a} \left(f(x) \pm g(x)\right) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = L \pm M$

c) $\lim_{x \to a} \left(f(x).g(x)\right) = \lim_{x \to a} f(x).\lim_{x \to a} g(x) = L.M$

d) $\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{L}{M}$; $M \neq 0$

NOTA IMPORTANTISIMA !!

De $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ se puede afirmar:

1. Que no existe si $L \neq 0$ y $M = 0$
2. Que es igual a cero si $L = 0$ y $M \neq 0$
3. NADA EN PRINCIPIO si $L = M = 0$