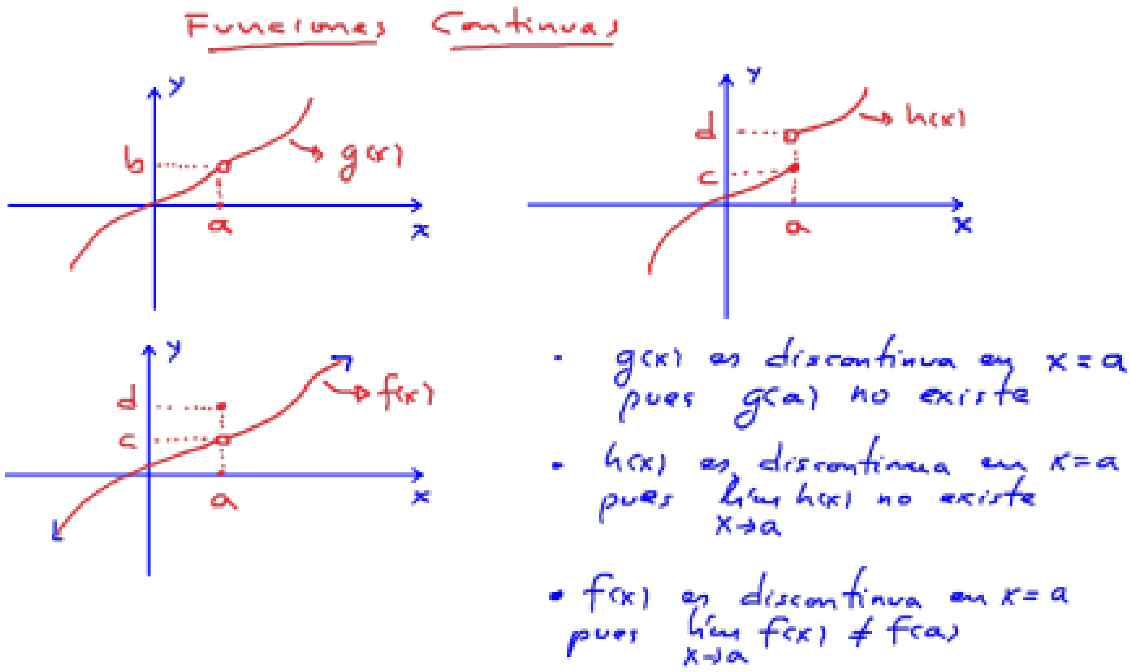
UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Curso: CÁLCULO I
Profesor: Victor Hugo Gil A. *febrero*/2019

Continuidad



Definición: Una función f es continua en $x=a$ si:

1. $f(a)$ existe
2. $\lim_{x\to a} f(x)$ existe
3. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Ej: ¿ $f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x^2-4} & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ \frac{1}{4} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ $\qquad D_f = [0,\infty)$

es continua en $x=2$?

s/ Respondemos a 3 preguntas:

(1) ¿ $f(2)$ existe? R/. Si $\boxed{f(2) = \frac{1}{4}}$ (1)

(2) ¿ $\lim_{x\to 2} f(x)$ existe?

R/. Veamos:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^-} \frac{\cancel{x-2}}{(x+2)\cancel{(x-2)}} =$$

$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{1}{4}}$$ (2)

Por (1) y (2) se concluye que f es continua en $x=2$.

Ej: Decida si la función $f(x) = \begin{cases} -\frac{|x|}{x} & si \quad x<0 \\ \frac{sen x}{x} & si \quad x>0 \\ 1 & si \quad x=0 \end{cases}$

es continua

S/ Analicemos la continuidad de $f(x)$ en $x=0$:

Respondemos a 3 preguntas :

1. $f(0)$ existe?

R/. Sí $f(0)=1$

2. ¿ $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe ?

R/. Deben calcularse límites laterales

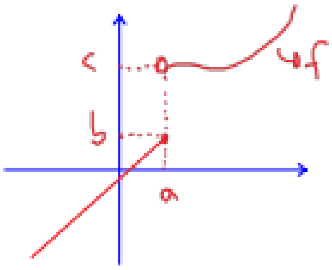
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} -\frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} -\frac{-x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} = \lim_{x\to 0^-} 1 = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{sen x}{x} = 1$$

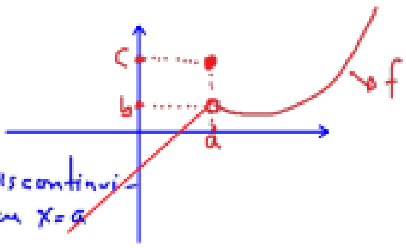
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 1$$

3. Puesto que $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ se concluye que f es continua en $x=0$.

Def. Si $f(x)$ es discontinua en $x=a$ pero $\lim_{x\to a} f(x)$ existe, se dice que la discontinuidad en $x=a$ es evitable ó removible. Pero si $\lim_{x\to a} f(x)$ no existe, se dice la discontinuidad en $x=a$ es irremovible, inevitable, de salto ó esencial



f tiene una discontinuidad irremovible en $x=a$



f tiene una discontinuidad removible en $x=a$

Propiedades de las funciones continuas

① Si f y g son funciones continuas, entonces:

a. $f+g$ es continua b. $f-g$ es continua

c. $f\cdot g$ es continua d. $f \div g$ es continua $(g\neq 0)$

② Si g es continua en $x=a$ y f es continua en $g(a)$, entonces $f\circ g$ es continua en $x=a$ y:

$$\lim_{x\to a} (f\circ g)(x) = \lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$$

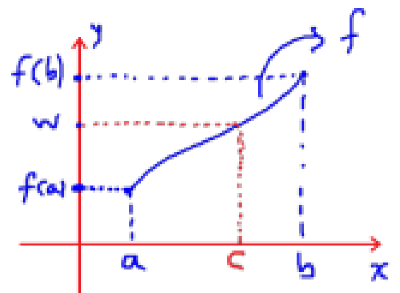
Ej: $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{x^2+6} = \sqrt{\lim\limits_{x\to 2}(x^2+6)} = \sqrt{10}$

Justificación: $f(x) = \sqrt{x} \qquad g(x) = x^2+6$

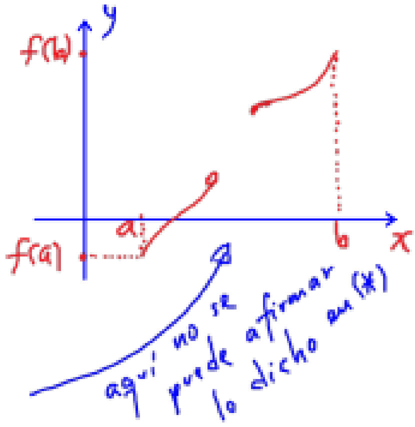
$$(f\circ g)(x) = \sqrt{x^2+6}$$

Obs. que g es continua en 2 y f es continua en $g(2) = 10$

Teorema del Valor Intermedio (T.V.I)



(*) La preimagen de cualquier número en $[f(a), f(b)]$ pertenece al intervalo $[a, b]$

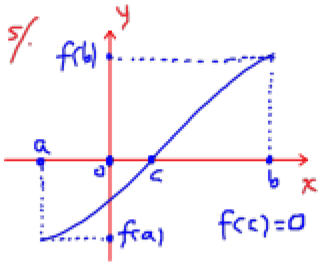


El T.V.I dice así:

Sea f una función continua en $[a,b]$. Para todo $w \in [f(a), f(b)]$, existe al menos un $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = w$

Ej: Use el T.V.I. para demostrar que la función $f(x) = 2x^3 + \sqrt[3]{x} - 2$ tiene al menos un cero en el intervalo $[-1, 1]$

S/.



$f(-1) = -5$, $f(1) = 1$ además f es continua en $[-1,1]$.
Dado que $0 \in [f(-1), f(1)]$, el T.V.I. garantiza que existe al menos un número $c \in [-1, 1]$ tal que $f(c) = 0$, es decir, c es un cero de $f(x)$.

Ej: ¿ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+1} & \text{si } x < -1 \\ -\dfrac{1}{2} & \text{si } x = -1 \\ \dfrac{x-1}{x^2-1} & \text{si } x > -1 \end{cases}$ es continua en $x = -1$?

S/. ① $f(-1) = -\frac{1}{2}$ ② $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \,?$ Veamos:

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{1}{x+1} = -\infty$. Esto basta para afirmar que $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ no existe. Por tanto f es discontinua en $x = -1$

Ej: ¿ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ es continua en $x = 0$?

S/. ① ¿$f(0)$ existe?

R/. Sí $f(0) = \dfrac{1}{0+1} = \dfrac{1}{1} = 1$

② ¿ $\lim_{x \to 0} f(x)$ existe? R/. Sí: Veamos:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 0^-} f(x) &= \lim_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) &= \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x+1} = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

③ Puesto que $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$ se concluye que f es continua en $x = 0$

Def. Si f es discontinua en $x=a$ pero $\lim_{x\to a} f(x)$ existe, se dice que f tiene una discontinuidad removible o evitable en $x=a$. En caso de que $\lim_{x\to a} f(x)$ no exista, diremos que la discontinuidad es irremovible, o, inevitable, o, esencial.

Ej: ¿Qué valores deben tener las constantes a y b para que la función $f(x)=\begin{cases} 2a+x+b & \text{si } x<2 \\ \frac{1}{x}+3b+ax & \text{si } x>2 \\ a+b & \text{si } x=2 \end{cases}$ sea continua en $x=2$?

S/ ① $f(2)=a+b$ ② $\lim_{x\to 2} f(x) = ?$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(2a+x+b) = 2a+2+b$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}\left(\frac{1}{x}+3b+ax\right) = \frac{1}{2}+3b+2a$$

Para que $\lim_{x\to 2} f(x)$ exista, se requiere que

$$\cancel{2a}+2+b = \frac{1}{2}+3b+\cancel{2a}$$

$$2-\frac{1}{2} = 2b \Rightarrow \frac{3}{2} = 2b \Rightarrow \boxed{\frac{3}{4}=b}$$

Se requiere también que $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$, es decir,

$$a+\cancel{b} = 2a+2+\cancel{b} \Rightarrow \boxed{a=-2}$$

también se pudo haber igualado $a+b$ a $\frac{1}{2}+3b+2a$ sabiendo que $b=\frac{3}{4}$

Recordemos que f es continua en $x=a$ si y solo si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Sea $h = x-a$. Note que si

$x\to a$, entonces $h\to 0$. Por tanto:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \iff \lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$$

Hemos mostrado que f es continua en $x=a$ si y solo si

$$\boxed{\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)}$$

Teorema: Si $p(x)$ es una función polinómica, entonces

$$\lim_{x\to a} p(x) = p(a)$$

Como consecuencia se tiene que las funciones polinómicas son continuas.

Una función racional es de la forma $\frac{p(x)}{q(x)}$ donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios

Toda función racional es continua en su dominio

Ej: $f(x) = \frac{x^2+2}{x-1}$ es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$

Def Una función f es continua en un intervalo I, si es continua en cada número de I.

Ej: Sea $f(x) = \sqrt{9-x^2}$. Muestre que f es continua en $[-3,3]$

S/. Sea $c \in [-3,3]$.

$f(c) = \sqrt{9-c^2} \in \mathbb{R}$

¿ $\lim_{x \to c} f(x)$ existe? . Veamos:

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} \sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-c^2}.$$

Se observa que $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$; por tanto

f es continua en $[-3,3]$

Ej: Muestre que $f(x) = \operatorname{sen} x$ es continua en $\mathbb{R}$.

S/. Sea $a \in \mathbb{R}$. Mostremos que $\lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) = \lim_{h\to 0} \operatorname{sen}(a+h) = \lim_{h\to 0} (\operatorname{sen} a . \cos h + \cos a . \operatorname{sen} h)$$

$$= \operatorname{sen} a . \lim_{h\to 0} \cos h + \cos a . \lim_{h\to 0} \operatorname{sen} h = (\operatorname{sen} a)(1) + (\cos a)(0)$$

$$= \operatorname{sen} a = f(a) .$$

Ej: La función $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ es continua

en $x = 0$.

s/. $f(0) = 0$. Mostremos que $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$

$\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$. Sea $y = \frac{1}{x}$.

Sin perdida de generalidad si $x \to 0^+$, entonces $y \to \infty$

$$\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = \lim_{y\to\infty} \frac{\operatorname{sen} y}{y} = 0$$

Teorema del Valor Intermedio:

Sea f una función continua en $[a,b]$. Sea w, tal que $f(a) \leq w \leq f(b)$. Entonces existe al menos un $c \in [a,b]$, tal que $f(c) = w$

Ej: Muestre que $f(x) = 8x^5 - 2x^2 - 4$ tiene al menos un cero en el intervalo $[-1,1]$

S/ f es continua en $[-1,1]$. Además $f(-1) = -14$, $f(1) = 2$. Puesto que $0 \in [f(-1), f(1)]$, el T.V.I. garantiza que existe al menos un $c \in [-1,1]$ tal que $f(c) = 0$, es decir, c es un cero de $f(x)$