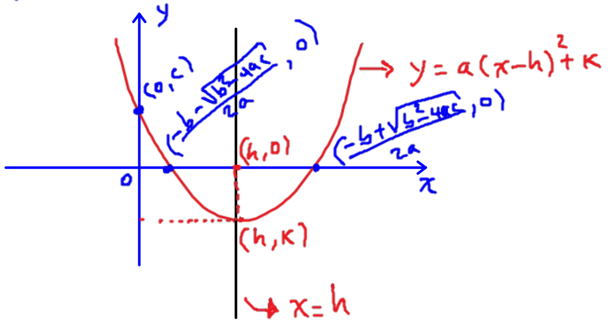
Abril 20/16

Función cuadrática

Según la geometría, la ecuación $y=a(x-h)^2+K$ tiene como gráfica una parábola con vértice en el punto (h,K) y que se abre hacia:

1. Arriba si $a>0$ 2. Abajo si $a<0$.

Su eje de simetría es la recta $x=h$.



La función cuadrática es $f(x)=ax^2+bx+c$, $a,b,c\in\mathbb{R}$ llamados coeficientes. Esta función se puede escribir en la forma $y=a(x-h)^2+K$, donde $y=f(x)$, $h=-\frac{b}{2a}$, $K=\frac{-b^2+4ac}{4a}$. Veamos:

$$f(x)=ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c =$$

$$= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)+c-\frac{b^2}{4a}$$

$$= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$ Entonces

$$f(x)=a\left(x-\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$ Entonces:

la gráfica de $f(x)=ax^2+bx+c$ es una parábola con vértice en $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ y eje de simetría la recta $x=-\frac{b}{2a}$.

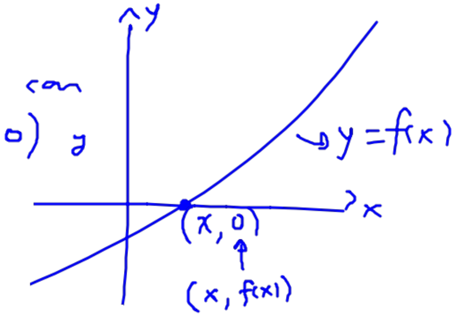
↳ $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$

Cortes con los ejes coordenados

Con el eje x: $f(x)=0 \iff ax^2+bx+c=0 \Rightarrow$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

• Si $b^2-4ac>0$, los cortes con el eje x son $\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},0\right)$ y $\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},0\right)$



• Si $b^2-4ac<0$, la parábola no intersecta el eje x

• Si $b^2-4ac=0$, la parábola intersecta el eje x en el vértice

Corte con el eje y: El corte es $(0,f(0))$

Ej: Dibuje la gráfica de $f(x)=2x^2+x-1$

S/. Vértice: $a=2$ $b=1$ $c=-1$

$$-\frac{b}{2a}=-\frac{1}{2(2)}=-\frac{1}{4}$$

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right)=f\left(-\frac{1}{4}\right)=2\left(-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{4}-1=\frac{1}{8}-\frac{1}{4}-\frac{1}{1}=\frac{1-2-8}{8}=-\frac{9}{8}$$

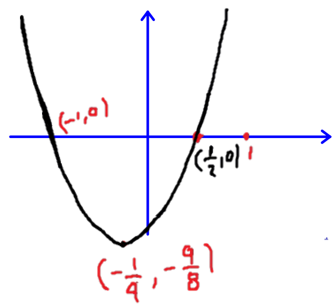
$V\left(-\frac{1}{4},-\frac{9}{8}\right)$

Cortes con los ejes:

Eje x: $2x^2+x-1=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4(2)(-1)}}{2(2)}=\frac{-1\pm3}{4}$

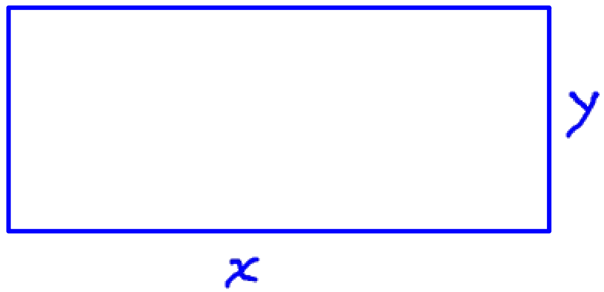
$\left(\frac{1}{2},0\right)$ y $(-1,0)$ son los puntos de corte con el eje x

Eje y: $(0,-1)$



Ej: Describa entre todos los rectángulos de 500 m de perímetro, el que encierra la máxima área

S/.



$$\text{Perímetro} = 2x+2y$$

$$2x+2y=500 \iff x+y=250$$

$$y = 250-x$$

$$\text{Área} = x\cdot y = x(250-x) \Rightarrow \boxed{A(x) = -x^2+250x}$$

He expresado el área como una función cuadrática. Se abre hacia abajo. Su vértice será el punto máximo

$a=-1 \quad b=250 \quad c=0$

Vértice: $\left(\dfrac{-250}{2(-1)},\ -(125)^2+250(125)\right)$. El valor de x para el cual el área $A(x)$ es máxima es: $x=125$

El valor de y será:

$$y=250-x=250-125=125$$

Por tanto el rectángulo debe ser un cuadrado de 125 m. por 125 m.

Def. Una función racional es de la forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$ donde $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinómicas

$f(x)$ se dice que es propia si $\operatorname{grad}(p(x)) < \operatorname{grad}(q(x))$

Si $\operatorname{grad} p(x) \geq \operatorname{grad} q(x)$, se dice que $f(x)$ es impropia

Toda función racional impropia se puede escribir como la suma de una func. rac. propia y un polinomio.

Ej: $\dfrac{3x^3-2x^2+1}{x^2+6}$ escríbalo como $\dfrac{p(x)}{q(x)} + r(x)$ donde

$\dfrac{p(x)}{q(x)}$ es propia

S/

$$\begin{array}{r|l}
3x^3-2x^2+1 & x^2+6 \\ \cline{2-2}
-3x^3-18x & 3x-2 \\ \cline{1-1}
-2x^2-18x+1 & \\
2x^2 \quad +12 & \\ \cline{1-1}
-18x+13 &
\end{array}$$

$$3x^3-2x^2+1 = (x^2+6)(3x-2) + (13-18x)$$

$$\Rightarrow \frac{3x^3-2x^2+1}{x^2+6} = \frac{(x^2+6)(3x-2) + (13-18x)}{x^2+6}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{3x^3-2x^2+1}{x^2+6} = 3x-2 + \frac{13-18x}{x^2+6}}$$

Ceros de polinomios

Def. Sea $p(x)$ un polinomio. Se dice que c es un cero, o, una raíz de $p(x)$ si $p(c)=0$

Ej: $p(x) = 2x^3 - 4x - 2$ $\quad c=-1$ es un cero de $p(x)$, pues $p(-1) = 2(-1)^3 - 4(-1) - 2 = -2+4-2 = 0$

Def. Se dice que $p(x)$ es un factor de $q(x)$, si existe $r(x)$ tal que $p(x) \cdot r(x) = q(x)$

Teorema del residuo: El residuo de dividir $p(x)$ entre $x-c$ es $p(c)$.

(grad $p(x) > 0$)

$$\begin{array}{l|l} p(x) & x-c \\ \hline r & q(x) \end{array}$$

$$p(x) = q(x)(x-c) + r$$
$$p(c) = q(c)(c-c) + r$$
$$p(c) = r$$

Teorema del factor: $(x-c)$ es un factor de $p(x)$ si y solo si $p(c)=0$

$$\begin{array}{l|l} p(x) & x-c \\ \hline p(c) & q(x) \end{array}$$

$$p(x) = q(x).(x-c) + p(c)$$

Si $p(c)=0$ $\quad p(x) = q(x).(x-c)$

Teorema fundamental del álgebra:

Si $p(x)$ es un polinomio de grado n con coeficientes complejos, entonces $p(x)$ tiene al menos un cero complejo.

Corolario: Si $p(x)$ tiene coeficientes reales y c es un cero complejo de $p(x)$ entonces $\bar{c}$ también es un cero de $p(x)$